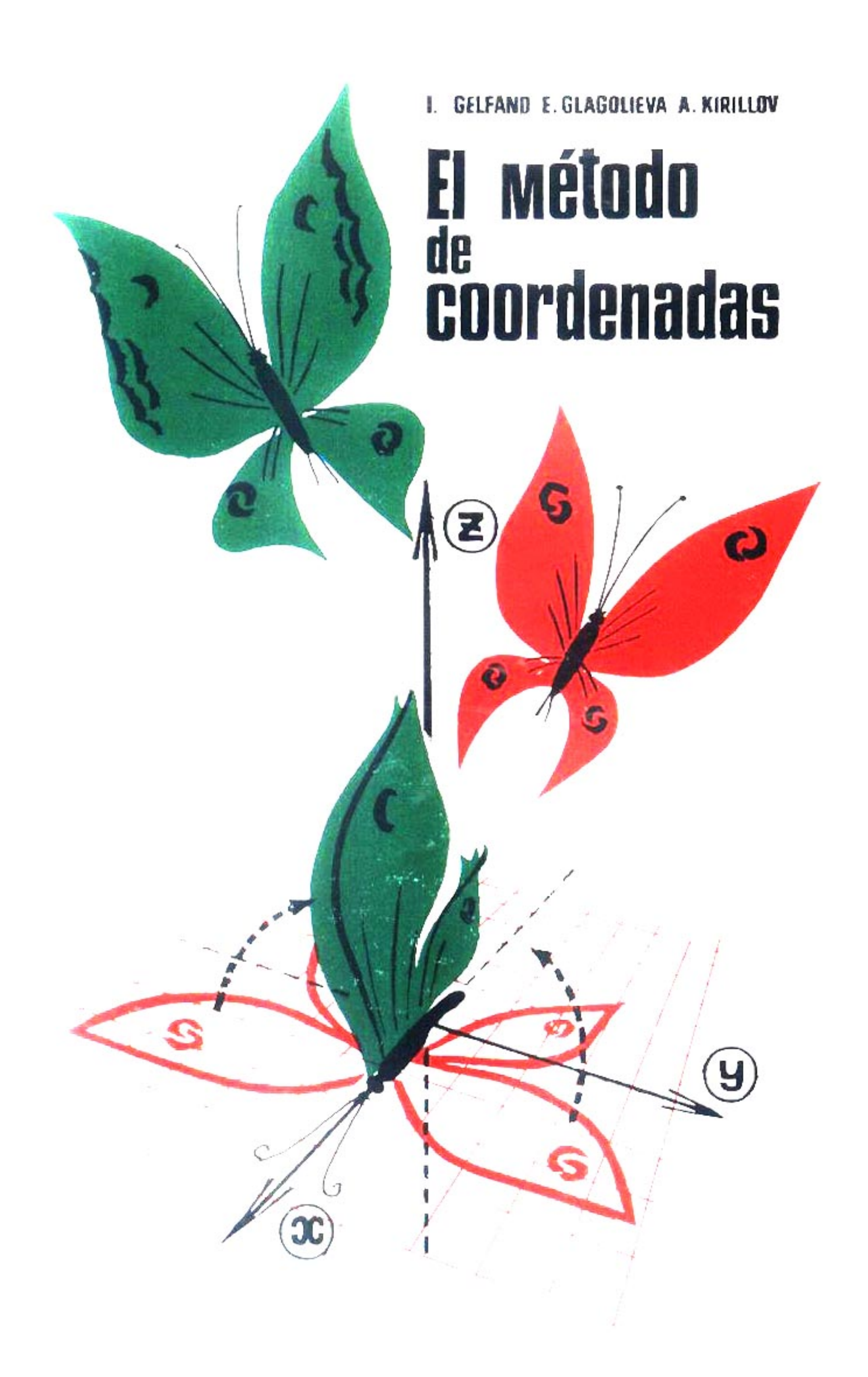


I. GELFAND E. GLAGOLIEVA A. KIRILLOV
El método de coordenadas
z
y
x

EL MÉTODO DE COORDENADAS

И. М. ГЕЛЬФАНД, Е. Г. ГЛАГОЛЕВА, А. А. КИРИЛЛОВ

МЕТОД КООРДИНАТ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» • МОСКВА

I. GELFAND, E. GLAGOLIEVA,
A. KIRILLOV

El METODO DE COORDENADAS



EDITORIAL MIR
MOSCU

Primera edición 1968
Primera reimpresión 1973
Segunda reimpresión 1981
Tercera reimpresión 1987

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

Prólogo

Para leer este libro no se requieren conocimientos especiales, sino sólo aquellos que están contenidos en el programa escolar del noveno grado. No obstante, este libro está escrito para estudiarlo sistemáticamente y no para leerlo someramente; por esto, su lectura puede resultar algo difícil. Para facilitarle su trayectoria por el libro introduciremos en los márgenes "las señales del tránsito". Cuando lea, ponga atención en ellas.



La señal "Estacionamiento permitido" destaca aquellas partes que contienen conocimientos básicos, para la comprensión de los materiales ulteriores, tales como: definiciones, fórmulas, etc. Frente a este signo debe detenerse, leer esta parte varias veces e imprescindiblemente memorizarla.



La señal "Pendiente empinada" se encuentra en aquellos lugares que contienen el material más difícil. Si esta parte está escrita con caracteres pequeños, se puede leerla después.



Cuando vea la señal "Curva peligrosa", ponga especial atención. Frecuentemente esta señal se encuentra en aquellas partes que a primera vista parecen ser fáciles y simples. Sin embargo, si no se analizan con la debida atención, más adelante pueden producirse serios errores.

La solución de problemas tiene un valor significativo. !Resuélvalos, obligatoriamente! Le deseamos éxito en los estudios.

Los autores

Introducción



Cuando Ud. lea en el periódico un comunicado referente al lanzamiento de un nuevo sputnik, ponga atención a las siguientes palabras: "El sputnik se puso en una órbita muy próxima a la calculada." ¿Ha pensado Ud. cómo es posible hacer este cálculo, o sea, determinar numéricamente la órbita del sputnik que es una línea? Pues, para esto es necesario ser capaz de traducir los conceptos geométricos al lenguaje numérico y sobre todo saber determinar numéricamente la situación de un punto en el espacio (en el plano, en la superficie de la Tierra, etc.).

El método de coordenadas es un procedimiento para determinar la posición de un punto o de un cuerpo mediante números u otros símbolos.

Los números, mediante los cuales se determina la posición de un punto se llaman *coordenadas* del mismo.

Las coordenadas geográficas, que Uds. conocen muy bien, determinan la situación de un punto en una superficie (en la superficie de la Tierra); cada punto de la superficie terrestre tiene dos coordenadas: la longitud y la latitud.

Para determinar la situación de un punto en el espacio se necesitan tres números en vez de dos. Por ejemplo, para determinar la posición de un sputnik se puede indicar, además de la longitud y la

latitud del punto sobre el cual se encuentra, la altura de éste sobre la superficie terrestre.

Si se conoce la trayectoria del sputnik, es decir, la línea por la cual se mueve, para determinar su posición en esta línea es suficiente dar un número; por ejemplo, se puede indicar la distancia recorrida por el sputnik desde algún punto de la trayectoria.[1]

El método de coordenadas se aplica exactamente igual para determinar la posición de un punto en la vía férrea: se indica el número del poste de kilometraje. Este número es la coordenada del punto en la vía férrea. Por ejemplo, en la designación "Plataforma-kilómetro 42", el número 42 es la coordenada de la estación.

En el juego del ajedrez se emplean unas coordenadas peculiares, la posición de las piezas en el tablero se determina mediante letras y números. Las filas verticales de los escaques se designan por letras del alfabeto latino y las horizontales, por cifras. A cada escaque del tablero le corresponde una letra que indica la fila vertical en la cual se encuentra el escaque y una cifra que indica la fila horizontal. En nuestro dibujo el peón blanco se encuentra en el

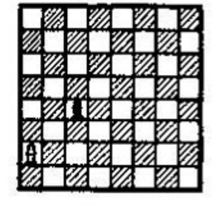


Fig. 1

[1] A veces se dice que la línea tiene una dimensión, la superficie dos y el espacio tres dimensiones. Con otras palabras, el número de dimensiones de una línea, de una superficie o del espacio es el número de coordenadas que determinan, en cada caso, la posición de un punto.

escaque *a2*, y el negro, en el *c4*. De este modo, se puede considerar que *a2* son las coordenadas del peón blanco y *c4*, las del negro.

La aplicación de coordenadas permite jugar al ajedrez por correspondencia. Para comunicar la jugada no es necesario dibujar el tablero y la disposición de las figuras, sino es suficiente decir, por ejemplo: "el gran maestro jugó *e2 — e4*" y ya todos sabrán cómo empezó la partida.

Las coordenadas que se emplean en las matemáticas permiten determinar numéricamente la posición de un punto cualquiera del espacio, del plano o de la línea. Esto da la posibilidad de "cifrar" diversos tipos de figuras, o sea, representarlas numéricamente. En el ejercicio 1 del párrafo 4 Ud. encontrará un ejemplo de cifrado semejante.

El método de coordenadas tiene una importancia especial, por cuanto permite el empleo de las máquinas calculadoras modernas no sólo en los cómputos de diferentes tipos, sino también para la resolución de problemas geométricos y para la investigación de relaciones y de elementos geométricos de cualquier naturaleza.

Capítulo I

§ 1. Las coordenadas del punto en la recta

Comenzaremos el estudio de las coordenadas que se emplean en las matemáticas, analizando el caso más simple: la determinación de la posición de un punto en una recta.

1. El eje numérico

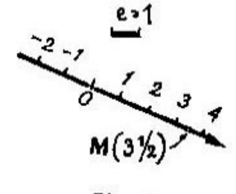


Fig. 1



Para determinar la posición de un punto en una recta se procede del modo siguiente: se elige en la recta un punto u *origen de referencia* (un punto cualquiera O), *una unidad de medida* (el segmento e) y *una dirección*, la cual se considera positiva (en la fig. 1 está indicada con una flecha).

El eje numérico es la recta en la que están indicados el origen de referencia, la unidad de medida y la dirección positiva. Para determinar la posición de un punto en el eje numérico es suficiente designar un número, por ejemplo $+5$. Esto significa que el punto se encuentra a una distancia de 5 unidades de medida del origen de referencia en la dirección positiva.

La *coordenada* de un punto en el eje numérico, es el número que determina la posición del punto en este eje.



La coordenada del punto en el eje numérico es igual a la distancia

entre el punto y el origen de referencia, la cual se expresa en la unidad de medida elegida y se considera con signo más, si el punto se encuentra en la dirección positiva del origen, y con signo menos en el caso contrario. Frecuentemente, el origen de referencia se llama *origen de coordenadas*. La coordenada del origen (el punto O) es igual a cero.

Se emplean notaciones del siguiente tipo: $M(-7)$, $N(a)$, etc. La primera de ellas designa el punto M con coordenada menos siete y la segunda, el punto N con coordenada a. Generalmente, en forma abreviada se dice: "el punto menos siete", "el punto a", etc.

De esta forma hemos establecido una correspondencia entre los números y los puntos de la línea recta. De donde resulta, que a cada punto de la recta corresponde un número determinado: su coordenada, y a cada número (en esta misma correspondencia), un punto determinado de la recta; a dos puntos diferentes corresponden dos números distintos. En matemática, este tipo de correspondencia se llama correspondencia *biunívoca*. A primera vista, parece que es muy simple establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números. Sin embargo, cuando los matemáticos pensaron en esto, resultó que para explicar el sentido exacto de las palabras que forman esta frase, era necesario crear una gran teoría complicada. Así pues, inmediatamente surgen dos simples preguntas difíciles de contestar: ¿Qué es número? y ¿Qué se debe entender por punto?



Estos problemas se refieren a los llamados fundamentos de la geometría y a la axiomática de los números. Más adelante, en otras nuestras publicaciones, estudiaremos estos problemas más detalladamente.

A pesar de que la cuestión sobre la determinación de la situación de un punto en la recta es excesivamente simple, es necesario analizarla atentamente para habituarse a ver en las relaciones numéricas, las geométricas y viceversa.

Hágase un control.

Si Ud. comprendió correctamente el párrafo 1, sin ninguna dificultad resolverá los ejercicios que le proponemos. Si no puede resolver estos ejercicios significará que Ud. omitió algo o no lo comprendió. Entonces, vuelva atrás y lea nuevamente este apartado.

Ejercicios.

1. a) Marque en el eje numérico los puntos $A(-2)$, B $(13/3)$, $K(0)$

b) Marque en el eje numérico el punto $M(2)$. Encuentre en el eje numérico dos puntos A y B que estén a la distancia de tres unidades del punto M. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B?

2. a) Se sabe que el punto $A(a)$ se encuentra a la derecha [1] del punto $B(b)$. ¿Cuál número es mayor a o b?

b) Sin dibujar los puntos en el eje numérico, diga ¿cuál de los dos puntos está más a la derecha: $A(-3)$ ó $B(-4)$, $A(3)$ ó $B(4)$, $A(-3)$ ó $B(4)$, $A(3)$ ó $B(-4)$?

3. ¿Cuál de los dos puntos está más a la derecha: $A(a)$ ó $B(-a)$?

---

[1] Aquí y más adelante se supone que la situación del eje es horizontal y la dirección positiva es la que va de la izquierda hacia la derecha.

Respuesta. No se sabe, ya que depende del valor que adquiera a. Si a es un número positivo, A se encuentra a la derecha de B; si a es un número negativo, entonces B está a la derecha de A pero, si $a=0$, los puntos A y B coinciden.

4. Piense cuál de los dos puntos está a la derecha: a) $M(x)$ ó $N(2x)$; b) $A(c)$ ó $B(c+2)$; c) $A(x)$ ó $B(x^2)$; d) $A(x)$ ó $B(x-a)$.

Respuesta al ejercicio 4d. Si a es mayor que cero, a la derecha estará A; si a es menor que cero, entonces a la derecha estará B. Si $a=0$, A y B coinciden.

5. Marque en el eje numérico los puntos $A(-5)$ y $B(7)$. Encuentre la coordenada del punto medio del segmento AB.

6. Señale en el eje numérico, con un lápiz rojo, los puntos cuyas coordenadas son: a) números enteros; b) números positivos.

7. Señale en el eje numérico todos los puntos x, para los cuales se cumple: a) $x<2$; b) $x\geqslant 5$; c) $2<x<5$; d) $-3^1/_4\leqslant x\leqslant 0$; e) $x-3<<5$; f) $x^2<1$.

2. *El valor absoluto del número*

El valor absoluto de un número a (o *módulo* del número a) es la distancia desde el punto $A(a)$ hasta el origen de coordenadas.



El módulo del número a se designa colocando el número a entre unas líneas verticales: $|a|$, es el módulo de a.

Ejemplo, $|-3|=3$, $|^1/_2|=^1/_2$.

Como los puntos a y $-a$ están situados a igual distancia del ori-

gen de coordenadas, los números a y $-a$ tienen igual valor absoluto: $|a|=|-a|$.

De aquí se deduce que



$$\text{si } a>0, \text{ entonces, } |a|=a,$$
$$\text{si } a<0, \text{ entonces, } |a|=-a,$$
$$\text{si } a=0, \text{ entonces, } |a|=0.$$

Ejercicios.

1. ¿Dónde están situados en el eje numérico los puntos x, para los cuales se cumple: a) $x=2$; b) $|x|>3$; c) $|x|\leqslant 5$; d) $3<|x|<5$?

Resolución del ejercicio 1b. Si x es un número positivo, entonces $|x|=x$, y por consiguiente, $x>3$; si x es un número negativo, entonces $|x|=-x$, en este caso, de la desigualdad $-x>3$ se deduce que $x<-3$.

Respuesta al ejercicio 1b. Los puntos están situados a la izquierda del punto -3 y a la derecha del punto 3. Esta respuesta se puede obtener más rápidamente, si se tiene en cuenta que $|x|$ es la distancia del punto x al origen de coordenadas. Entonces, es evidente que los puntos buscados están situados a una distancia mayor que 3 del origen de coordenadas.

2. ¿Cómo escribir sin signo de módulo las siguientes expresiones: a) $|a^2|$; b) $|a-b|$, si $a>b$; c) $|a-b|$, si $a<b$; d) $|-a|$, si a es un número negativo?

3. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la expresión $\frac{|x|}{x}$?

4. Se sabe que $|x-3|=x-3$. ¿Qué valores puede tomar x?

5. Señale en el eje numérico donde están situados los puntos, para los cuales se cumple: $|x-2|=2-x$.

6. Resuelva las ecuaciones: a) $|x-2|=3$; b) $|x+1|+|x+2|=2$; c) $|x+1|+|x+2|=1$.

Resolución del ejercicio 6b. Como $|a|=a$ para $a\geqslant 0$ y $|a|=-a$ para $a<0$, las expresiones $|x+1|$ y $|x+2|$ «se abren» de diferente forma, según sea el signo que tengan las expresiones comprendidas bajo el signo módulo. Por esto, dividamos todo el conjunto de valores de x en tres partes (fig. 2).

$$x\geqslant -1,$$
$$-2<x<-1,$$
$$x\leqslant -2,$$

y estudiemos cada una de ellas separadamente.[1]

1) $x\geqslant -1$. Para estos valores de x tenemos:

$$x+1\geqslant 0 \quad \text{y} \quad x+2>0.$$

Por consiguiente, $|x+1|=x+1$ y $|x+2|=x+2$. La ecuación *b*) tiene la forma $2x+3=2$. La raíz de esta ecuación $-1/2$ satisface a nuestra condición $x\geqslant -1$.

2) Para $-2<x<-1$ la ecuación toma la forma $1=2$ (¡Compruébelo!).

Esto significa que ningún valor contenido entre -2 y -1 satisface a la ecuación b).

3) El caso $x\leqslant -2$ véalo Ud. mismo.

Respuesta al ejercicio 6b. La ecuación $|x+1|+|x+2|=2$ tiene dos raíces: $-1/2$ y $-5/2$.

Respuesta al ejercicio 6c. La ecuación tiene infinitas soluciones: el conjunto de todas las soluciones está comprendido en el segmento $-2\leqslant x\leqslant -1$; es decir, todo número mayor o igual a -2 y menor o igual a -1 satisface a la ecuación.

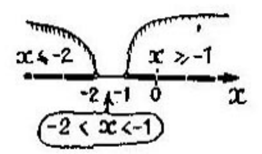


Fig. 2



3. *Distancia entre dos puntos*

Comenzaremos con unos ejercicios. Hállese la distancia entre los

[1] Los límites de cada una de estas partes son aquellos puntos, en los que se anula una de las expresiones contenida bajo el signo módulo.

puntos

a) $A(-7)$ y $B(-2)$;

b) $A\left(-3\frac{1}{2}\right)$ y $B(-9)$.

Es fácil resolver estos problemas, ya que conociendo las coordenadas de los puntos se puede analizar qué punto está más a la derecha y cuál más a la izquierda, cómo están situados con respecto al origen de coordenadas, etc. Después de esto, es muy fácil darse cuenta cómo se calcula la distancia buscada.

Ahora le proponemos a Ud. deducir una fórmula general para calcular la distancia entre dos puntos del eje númerico, es decir, resolver este problema:

Problema. Dados dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$, determinar la distancia ρ (A, B) entre ellos.[1]

Solución. Como los valores particulares de las coordenadas de los puntos son desconocidos, es necesario analizar todos los casos posibles de la posición relativa de los puntos A, B y el origen de coordenadas O.

Tales casos son seis. Primeramente veamos tres casos en los que el punto B está a la derecha de A (fig. 3).

En el primero de ellos (fig. 3, *a*) la distancia $\rho(A, B)$ es igual a la diferencia entre las distancias de los puntos A y B respectivamente al origen de coordenadas. Como

Fig. 3

[1] Generalmente, para la designación de distancia se emplea la letra griega ρ («ro»). La expresión $\rho(A, B)$ representa la distancia entre los puntos A y B.

en este caso x_1 y x_2 son positivos, se tiene:

$$\rho(A, B)=x_2-x_1.$$

En el segundo caso (fig. 3, *b*), la distancia es igual a la suma de las distancias respectivas de los puntos B y A al origen de coordenadas, es decir:

$$\rho(A, B)=x_2-x_1,$$

puesto que en este caso x_2 es positivo y x_1 es negativo.

Demuestre que en el tercer caso (fig. 3, *c*) la distancia se calcula por la misma fórmula.

Los otros tres casos (fig. 4) se diferencian de los analizados solamente en que los puntos A y B han cambiado sus funciones. Se puede comprobar que en cada uno de estos casos la distancia entre los puntos A y B es igual a

$$\rho(A, B)=x_1-x_2.$$

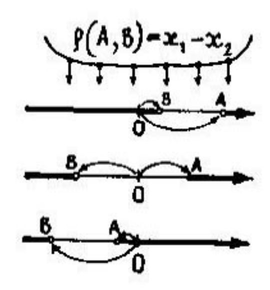


Fig. 4



De este modo en todos los casos cuando $x_2>x_1$, la distancia $\rho(A, B)$ es igual a x_2-x_1 y, en todos los casos, para $x_1>x_2$, esta distancia es igual a x_1-x_2. Recordando la definición de módulo, esto se puede escribir mediante una fórmula única, válida para los seis casos:

$$\rho(A, B)=|x_2-x_1|.$$

Si se desea, se puede anotar esta fórmula en la forma

$$\rho(A, B)=|x_1-x_2|.$$

Si se es demasiado meticuloso es necesario analizar otro caso, cuando $x_2=x_1$, es decir, cuando los

puntos A y B coinciden. Es evidente que aún en este caso

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

De esta forma el problema está completamente resuelto.

Ejercicios.

1. Señale en el eje numérico los puntos x, para los cuáles se cumple a) $\rho(x, 7) < 3$; b) $|x-2| > 1$; c) $|x+3| = 3$.

2. En el eje numérico se dan dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$. Encontrar la coordenada del punto medio del segmento AB.

Observación. Al resolver este problema Ud. debe estudiar todos los casos posibles de ubicación de los puntos A y B en el eje numérico o bién, escribir una solución tal que sea inmediatamente válida para todos los casos.

3. Hallar la coordenada de un punto que está situado en el numérico de tal modo que su distancia al punto $A(-9)$ es tres veces menor que su distancia al punto $B(-3)$.

4. Resuelva ahora las ecuaciones del ejercicio 6 del apartado 2 empleando el concepto de distancia entre dos puntos.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|x+3| + |x-1| = 5$;
b) $|x+3| + |x-1| = 4$;
c) $|x+3| + |x-1| = 3$;
d) $|x+3| - |x-1| = 5$;
e) $|x+3| - |x-1| = 4$;
f) $|x+3| - |x-1| = 3$.

§ 2. Las coordenadas del punto en el plano

P

4. *El plano de coordenadas*

Para determinar las coordenadas de un punto en el plano trazaremos en este último dos ejes numéricos perpendiculares entre sí. Uno de los ejes se llama *eje de las abscisas* o eje x (o bien Ox) y el otro, *eje de las ordenadas* o eje y (o bien Oy).

La dirección de los ejes se elige frecuentemente de tal modo que el semieje positivo Ox coincida con el semieje positivo Oy, al hacerlo girar un ángulo de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj (fig. 5). El punto de intersección de los ejes se considera como el origen de cada uno de los ejes numéricos Ox y Oy. Este punto se llama *origen de coordenadas* y se designa con la letra O. Generalmente, las unidades de medida en los ejes se toman iguales.

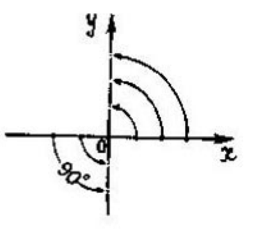


Fig. 5

Tomemos en el plano un punto cualquiera M y bajemos desde él perpendiculares a los ejes Ox y Oy (fig. 6). Los puntos de intersección M_1 y M_2 de estas perpendiculares con los ejes se llaman proyecciones del punto M sobre los ejes de coordenadas.

El punto M_1 está en el eje numérico Ox, por lo cual, le corresponde un número determinado x: su coordenada en este eje. Del mismo modo, al punto M_2 le corresponde un número determinado y: su coordenada en el eje Oy.

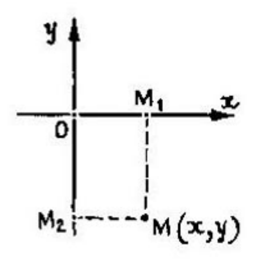


Fig. 6

Así que a cada punto M situado en el plano le corresponden dos



números x e y, llamados *coordenadas rectangulares cartesianas* del punto M. El número x se llama *abscisa* del punto M y el número y, su *ordenada*.

Recíprocamente, a cada par de números x e y puede corresponder un punto del plano, para el cual x es la abscisa e y, la ordenada.



Ahora hemos establecido una correspondencia biunívoca [1] entre los puntos del plano y los pares de números x e y, que siguen un orden determinado (primero x, después y).



De este modo, *las coordenadas rectangulares cartesianas* de un punto en el plano son las coordenadas de las proyecciones de este punto en los ejes de coordenadas.

Generalmente, las coordenadas del punto M se escriben así: $M(x, y)$. En primer lugar se anota la abscisa y en segundo lugar la ordenada. A veces, en lugar de decir "el punto con las coordenadas (3, —8)", se dice, "el punto (3, —8)".

Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro *cuadrantes*. Se considera primero el cuadrante comprendido entre el semieje positivo Ox y el semieje positivo Oy. Los cuadrantes restantes se numeran siguiendo el orden contrario a las agujas del reloj (fig. 7).

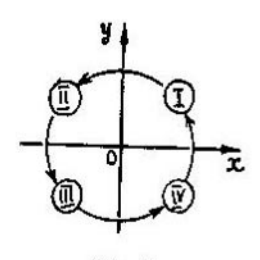


Fig. 7

Resuelva ahora algunos ejercicios.

---

[1] Correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y un par de números, es aquella correspondencia según la cual a cada punto se le asocia un par de números determinados y a cada par de números se le asocia un punto determinado (comp. con la pág. 11).

Ejercicios

Primero, le proponemos resolver algunos problemas sencillos.

1. Descifrar la palabra que está escrita.

(6, 2), (9, 2), (12, 1), (12, 0), (11, —2), (9, —2), (4, —2), (2, —1), (1, 1), (—1, 1), (—2, 0), (—2, —2), (2,1), (5, 2), (12, 2), (9, 1), (10, —2), (10, 0), (4, 1), (2, 2), (—2, 2), (—2, 1), (—2, —1), (0, 0), (2, 0), (2, —2), (4, 0), (4, —1), (12, —1), (12, —2), (11,0), (7, 2), (9, 0), (4, 2).

2. Diga, sin dibujar, en qué cuadrante está situado el punto $A(1, -3)$.

3. ¿En qué cuadrantes puede estar situado el punto, si su abscisa es positiva?

4. ¿Qué signos tienen las coordenadas de los puntos situados en el segundo cuadrante? ¿En el tercer cuadrante? ¿En el cuarto cuadrante?

5. En el eje Ox se ha tomado un punto con la coordenada —5. ¿Cuáles son sus coordenadas en el plano?

Respuesta. La abscisa del punto es igual a —5 y la ordenada es igual a cero.

Y ahora algunos problemas más complicados:

6. Dibuje los puntos $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$ y $D(0, 0)$. Si Ud. los dibujó correctamente, obtuvo los vértices de un cuadrado. ¿Cuál es la longitud del lado de

este cuadrado? ¿Cuál es su área[1]? Encontrar las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrado. ¿Podría Ud. demostrar que $ABCD$ es un cuadrado? Halle otros cuatros puntos (indique sus coordenadas) que sean los vértices de un cuadrado.

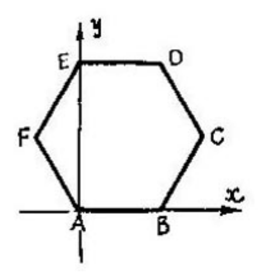


Fig. 8

7. Dibuje un hexágono regular $ABCDEF$ (fig. 8). Tome el punto A como origen de coordenadas, el eje de las abscisas en la dirección de A hacia B y por unidad de medida el segmento AB. Halle las coordenadas de todos los vértices de este hexágono. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

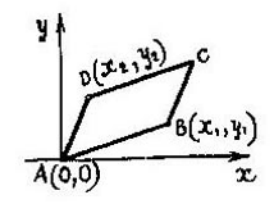


Fig. 9

8. En el plano se dan los puntos $A(0, 0)$, $B(x_1, y_1)$ y $D(x_2, y_2)$ (fig. 9). ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto C para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo?

5. *Relaciones que ligan a las coordenadas*

La posición de un punto en el plano queda totalmente determinada cuando se conocen sus dos coordenadas. ¿Y qué se puede decir de la posición del punto si solamente se conoce una de sus coordenadas? Por ejemplo: ¿Dónde se encuentran todos los puntos cuya abscisa es igual a 3? ¿Dónde están situados todos los puntos de coordenada, igual a 3 (no se sabe cual de las dos)?

[1] Por unidad de medición del área eligiremos la del cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de medida de los ejes.

Al dar sólo una de las dos coordenadas en un plano (o en una superficie) se determina por lo general, una línea. Este hecho, por cierto, sirvió de base del argumento de la novela de Julio Verne "Los hijos del capitán Grant". Los héroes del libro sólo conocían una de las coordenadas del lugar del naufragio (la latitud), por esto, para explorar todos los puntos posibles, ellos tuvieron que dar la vuelta al mundo por todo un paralelo; o sea, por una línea cuyos puntos tienen una latitud igual a 37°11′.

Frecuentemente, las relaciones entre las coordenadas determinan no sólo un punto, sino un *conjunto* de puntos. Por ejemplo, si se marcan todos los puntos que tienen la abscisa igual a la ordenada, es decir, los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación

$$x = y,$$

se obtiene una línea recta que, como fácilmente se demuestra, es la bisectriz de los ángulos del primer y del tercer caudrante (fig. 10).

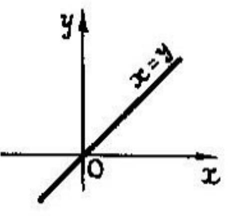


Fig. 10

En algunos casos, en vez de decir "un conjunto de puntos", se dice "el lugar geométrico de los puntos". Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la relación

$$x = y,$$

como ya dijimos, es la bisectriz de los ángulos del primer y tercer cuadrante.





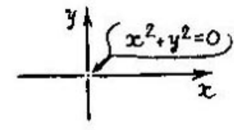


Fig. 11

No se debe creer que cada relación entre las coordenadas determina forzosamente una línea en el plano. Por ejemplo Ud. puede fácilmente convencerse que la relación $x^2+y^2=0$ determina un solo punto, el origen de coordenadas (fig. 11). Las coordenadas de ningún punto del plano satisfacen a la relación $x^2+y^2=-1$, la cual determina un conjunto "vacío" de puntos (fig. 12).

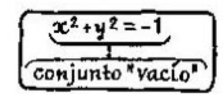


Fig. 12

La relación

$$x^2-y^2=0$$

determina un par de rectas en el plano, perpendiculares entre sí (fig. 13). La relación $x^2-y^2>0$ determina toda una región (fig. 14). Demuestre estas afirmaciones.

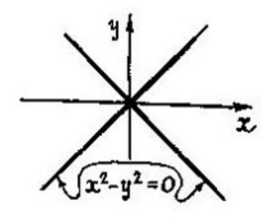


Fig. 13

Ejercicios.

1. Explique qué conjuntos de puntos se determinan por las relaciones:

a) $x=|y|$; $y=|x|$; $|x|=|y|$;

b) $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$;

c) $|x|+x=|y|+y$;

d) $x=[y]$[1]; $y=[x]$; $[x=[y]$;

e) $x-[x]=y-[y]$;

f) $x-[x]>y-[y]$.

La respuesta al ejercicio 1f, está dada en la página 95 fig. 55

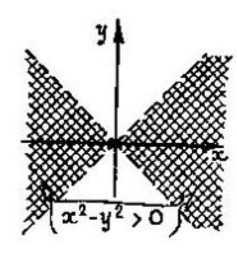


Fig. 14

---

[1] El símbolo $[x]$ representa la parte entera del número x, es decir, el mayor número entero que no excede a x. Por ejemplo,

$$\left[3\frac{2}{7}\right]=3;\ [5]=5;\ \left[-2\frac{1}{3}\right]=-3;$$
$$[-7]=-7.$$

2. Un camino rectilíneo separa un prado de un campo labrado. Un peatón recorre el camino a una velocidad de 5 km/h, el prado a una velocidad de 4 km/h y el campo labrado a una velocidad de 3 km/h. En el momento inicial el peatón está parado en el camino. Dibuje la región formada por los puntos recorridos por el peatón después de una hora de recorrido.

Respuesta. Véase la pág. 95, fig. 56.

3. Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro cuadrantes. Por los cuadrantes I y III (incluyendo los ejes de coordenadas) el movimiento es posible a una velocidad a; y por los cuadrantes II y IV, (excluyendo los ejes de coordenadas) a una velocidad b. Dibuje el conjunto de puntos que pueden ser logrados en un tiempo dado desde el origen de coordenadas, si:

a) la velocidad a es dos veces mayor que b;

b) las velocidades están relacionadas por la expresión

$$a = b \cdot \sqrt{2}.$$

6. Distancia entre dos puntos

Ud. sabe ahora hablar sobre los puntos con el lenguaje de los números. Por ejemplo, ahora no necesitamos explicar: tome un punto que se encuentra a tres unidades a la derecha del eje y y a cinco unidades más abajo del eje x. Sencillamente basta decir: tome el punto (3, —5).

Antes ya expresamos que esto constituía una ventaja considerable. Así, pues, se puede enviar por telégrafo un dibujo formado por puntos, darlo a la máquina computadora, la cual no sabe nada de dibujos, pero comprende muy bien los números.

En el párrafo 5 dimos algunos conjuntos de puntos en el plano mediante relaciones entre los números. Ahora probaremos traducir sucesivamente al lenguaje de los números otros conceptos geométricos y otros hechos.

Comenzaremos con un sencillo y habitual problema: encontrar la distancia entre dos puntos del plano.

Como siempre, consideraremos que los puntos están dados por sus coordenadas, el problema consiste ahora en encontrar un procedimiento para calcular la distancia entre dos puntos, conociendo sus coordenadas. Por supuesto, para hallar este procedimiento se permite recurrir al dibujo, pero en el procedimiento mismo no se puede hacer ninguna referencia al dibujo, sino sólo indicar las operaciones que se deben realizar con los números dados (las coordenadas de los puntos), y el orden en que éstas se deben efectuar para obtener el número buscado, o sea, la distancia entre los puntos.

De este modo, se puede resolver un problema propuesto incluso cuando es difícil recutrir al dibujo (por ejemplo, si las coordenadas son muy grandes). Además, es evidente que la solución analítica

(numérica) siempre será más exacta que la medición directa en el dibujo.

Es mejor resolver el problema propuesto, primero para el caso en que uno de los puntos dados se encuentre en el origen de coordenadas. Empiece por algunos ejercicios numéricos: calcule la distancia entre el origen de coordenadas y cada uno de los puntos (12,5), (—3, 15) (—4, —7), aplicando el teorema de Pitágoras.

Repitiendo estos razonamientos para el caso general obtendrá Ud. la fórmula general para calcular la distancia $\rho(O, M)$ entre cualquier punto $M(x, y)$ y el origen de coordenadas O (0, 0) (fig. 15):

$$\rho(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

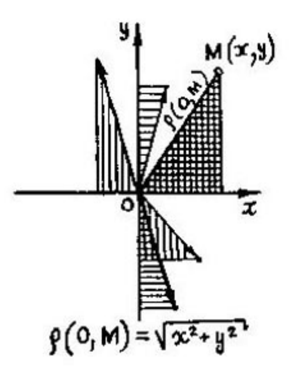


Fig. 15



Evidentemente, la regla expresada por esta fórmula satisface a las condiciones dadas. En particular, ésta puede ser empleada para los cálculos efectuados en las máquinas, las cuales son capaces de sumar, multiplicar y extraer raíz cuadrada de los números.

Resolvamos ahora un problema general.

Problema. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos dados en el plano; encontrar la distancia ρ (A, B); entre ellos.

Resolución. Designemos por A_1, B_1, A_2, B_2 (fig. 16) las proyecciones de los puntos A y B sobre los ejes de coordenadas.

Designemos con la letra C el punto de intersección de las rectas AA_1 y BB_2. Según el teorema de

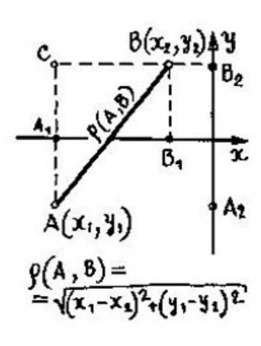


Fig. 16

Pitágoras, del triángulo rectángulo ABC, obtendremos: [1]

$$\rho^2(A, B) = \rho^2(A, C) + \rho^2(B, C). \quad (*)$$

Pero, la longitud del segmento AC es igual a la longitud del segmento A_2B_2, los puntos A_2 y B_2 se encuentran en el eje Oy y tienen respectivamente en este eje las coordenadas y_1 e y_2. Según la fórmula obtenida en el párrafo 3, la distancia entre estos puntos es igual a $|y_1 - y_2|$.

Razonando análogamente, obtenemos que la longitud del segmento BC es igual a $|x_1 - x_2|$. Reemplazando en la fórmula (*) los valores de AC y BC encontrados, obtenemos

$$\rho^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$



De este modo, la distancia $\rho(A, B)$ entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se calcula por la fórmula:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Obsérvese que todos nuestros razonamientos no sólo son válidos para una ubicación de los puntos como en la fig. 16, sino también para cualquier otra.

Haga Ud. otro dibujo (por ejemplo, tome el punto A en el primer cuadrante y B, en el segundo) y cerciórese de que todos los razonamientos se pueden repetir palabra por palabra sin variar inclusive la designación de los puntos.

Señalamos además que la fórmula del apartado 3, referente a la distancia entre dos puntos en

---

[1] Designamos por $\rho^2(A, B)$ el cuadrado de la distancia $\rho(A, B)$.



la recta (véase la pág. 16), se puede escribirla en forma análoga: [1]

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

Ejercicios

1. Se dan tres puntos en el plano: $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$ y $C(1, -2)$. Demostrar que estos tres puntos están en una misma recta (son colineales).

Indicación. Demuestre que uno de los lados del triángulo ABC es igual a la suma de los otros dos.

2. Aplique la fórmula de la distancia entre dos puntos para la demostración del teorema ya conocido por Ud.: en un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

---

[1] Aquí aplicamos la fórmula:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(se tiene en cuenta el valor aritmético de la raíz). Una aplicación negligente de esta regla puede dar lugar a conclusiones falsas (a veces erróneamente se considera que $\sqrt{x^2} = x$). En calidad de ejemplo exponemos una serie de deducciones que contienen yerros de ese tipo. ¡Descúbralos!



$$1-3=4-6 \Rightarrow 1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2} \Rightarrow 1=2.$$

(el signo $\Rightarrow$ reemplaza a la expresión «se deduce»).

Indicación. Tome por origen de coordenadas uno de los vértices del paralelogramo y emplee los resultados obtenidos en el problema 8 del apartado 4. Ud. verá que la demostración del teorema se reduce a la comprobación de una simple identidad algebraica. ¿Cuál es?

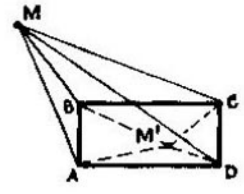
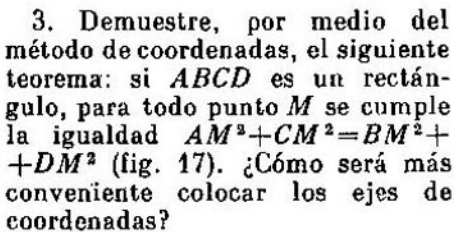
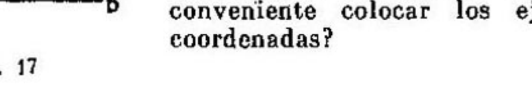


Fig. 17


3. Demuestre, por medio del método de coordenadas, el siguiente teorema: si $ABCD$ es un rectángulo, para todo punto M se cumple la igualdad $AM^2+CM^2=BM^2+$ $+DM^2$ (fig. 17). ¿Cómo será más conveniente colocar los ejes de coordenadas?



7. *Determinación de las figuras*

En el apartado 5 dimos algunos ejemplos de relaciones entre las coordenadas que determinan algunas figuras en el plano. Estudiemos algo más sobre la determinación de figuras geométricas mediante relaciones numéricas.

Consideramos cada figura como el conjunto de los puntos que la forman. Determinar figura significa indicar el procedimiento por el cual se podría saber, si tal o cual punto pertenece o no a la figura estudiada.

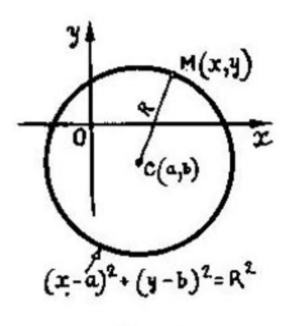


Fig. 18

Por ejemplo, para encontrar tal procedimiento respecto a la circunferencia, empleamos la definición de ésta como el conjunto de puntos, cuya distancia a cierto punto C (centro de la circunferencia) es igual al número R (radio). En este caso, para que el punto $M(x, y)$ (fig. 18) pertenezca a la circunferencia con centro $C(a, b)$,

es necesario y suficiente que $\rho(M, C)$ sea igual a R.

Recordemos, que la distancia entre dos puntos se determina por la fórmula:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Por consiguiente, la condición para que el punto $M(x, y)$ pertenezca a la circunferencia con centro en el punto $C(a, b)$ y radio R, se expresa mediante la relación:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

que se puede escribir en la siguiente forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (*)$$



De este modo, para comprobar si algún punto pertenece a la circunferencia, es necesario comprobar si se cumple o no, para este punto la relación (*). Para esto es necesario reemplazar en la expresión (*) las coordenadas x e y del punto estudiado. Si se obtiene una identidad, el punto pertenece a la circunferencia; en caso contrario, no le pertenecerá. De este modo conociendo la ecuación (*) podemos decir si un punto cualquiera del plano pertenece o no a la circunferencia. Por lo anterior, la ecuación (*) se llama *ecuación de la circunferencia* con centro en el punto $C(a, b)$ y radio R.

Ejercicios.

1. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-2, 3)$ y radio 5. ¿Pasa esta circunferencia por el punto $(2, -1)$?

3 -01153

2. Demuestre que la ecuación

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

determina en el plano una circunferencia. Busque su centro y su radio.

Indicación. Ponga la ecuación en la forma

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1, \text{ ó } (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

3. ¿Qué conjunto de puntos determina la relación $x^2 + y^2 \leqslant 4x + 4y$?

Solución. Escribamos esta desigualdad:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leqslant 8,$$

o bien,

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 8.$$

Ahora queda claro que esta relación expresa que la distancia de un punto del conjunto buscado al punto (2, 2) es menor o igual a $\sqrt{8}$. Evidentemente, los puntos que verifican esta condición se encuentran en el círculo con centro en el punto (2,2) y radio $\sqrt{8}$. Como en la relación está incluída la igualdad, al conjunto buscado pertenece también la frontera del círculo, o sea, la circunferencia.

Ya vimos que una circunferencia en el plano puede ser dada por medio de una ecuación. De esta misma manera se pueden determinar otras líneas cuyas ecuaciones, por supuesto, tendrán otra forma.

Anteriormente observamos que la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ representa un par de rectas (véase la pag. 26, fig. 13). Detengámonos en esto más minuciosamente. Si $x^2 - y^2 = 0$, entonces $x^2 = y^2$ y, por consiguiente, $|x| = |y|$. Recíprocamente,

si $|x|=|y|$, entonces $x^2-y^2=0$; por lo tanto, estas relaciones son equivalentes; pero, el valor absoluto de la abscisa representa la distancia del punto al eje Oy y el valor absoluto de la ordenada, la distancia del mismo al eje Ox. Esto significa que los puntos, para los cuales se cumple $|x|=|y|$, están a igual distancia de los ejes de coordenadas, o sea, yacen en las dos bisectrices de los ángulos formados por estos ejes. Recíprocamente, es evidente que las coordenadas de un punto cualquiera en cada una de estas bisectrices satisfacen a la relación $x^2=y^2$. Por esto, la ecuación $x^2-y^2=0$ se denomina ecuación del conjunto de estas dos bisectrices.

Por supuesto, Ud. conoce también otros ejemplos de determinación de líneas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $y=x^2$ es satisfecha sólo por todos los puntos de una parábola con vértice en el origen de coordenadas (fig. 19). La ecuación $y=x^2$ es *la ecuación de esta parábola*.

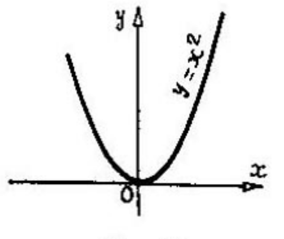


Fig. 19

Todos los puntos de una recta sólo satisfacen a una ecuación de la forma $ax+by+c=0$. La ecuación $ax+by+c=0$ es *la ecuación de la recta*.



En general, se llama *ecuación de una línea* aquella que se transforma en identidad, cada vez que se reemplazan x e y por las coordenadas de un punto cualquiera de la línea, y que no se verifica cuando se reemplazan por las coordenadas de un punto no perteneciente a la misma.

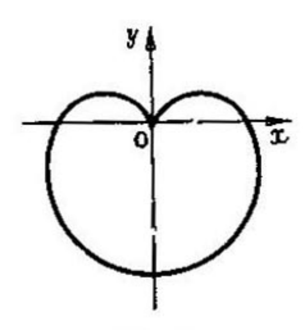


Fig. 20

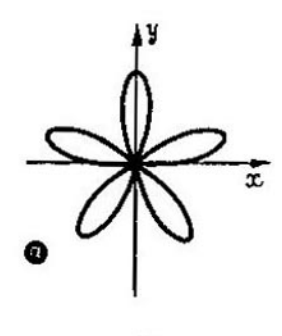
Por ejemplo, aún no sabiendo, cual es la línea que representa la ecuación

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2, \qquad (*)$$

podemos afirmar que esta línea pasa por el origen de coordenadas, ya que el punto (0, 0) satisfacen a esta ecuación; sin embargo, el punto (1, 1) no pertenece a esta curva, puesto que $(1^2+1^2+1)^2 \neq \neq 1^2+1^2$.

Si a Ud. le interesa saber cual es la curva representada por esta ecuación, vea la fig. 20. Esta curva se llama *cardioide*, porque tiene la forma de un corazón.

De este modo, si una máquina computadora pudiera sentir simpatía hacia una persona, probablemente le entregaría el dibujo de un corazón, mediante una ecuación, posiblemente, le regalaría un "buqué" matemático, es decir, las ecuaciones de las curvas representadas en la fig. 21; en efecto, como Ud. ve estas curvas parecen unas flores. Más adelante, cuando Ud. estudie otras coordenadas, denominadas polares, escribiremos las ecuaciones de estas "flores matemáticas".



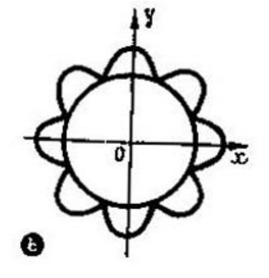


Fig. 21

8. *Comenzamos a resolver problemas*

Traduciendo los conceptos geométricos al lenguaje de las coordenadas, obtenemos la posibilidad de estudiar problemas algebraicos en lugar de problemas geométricos. Resulta que, después de esta trans-

formación, la mayoría de los problemas relacionados con rectas y circunferencias se reducen a ecuaciones de primer y segundo grado; para la resolución de este tipo de ecuaciones existen simples fórmulas generales.

Es necesario señalar que cuando se descubrió el método de coordenadas, en el siglo XVII, el arte de la resolución de ecuaciones algebraicas alcanzó su más alto nivel. Por ejemplo, en este período los matemáticos aprendieron a resolver cualquier ecuación de tercer o cuarto grado. Por esto, al descubrir el método de coordenadas, el científico francés R. Descartes, considerando los problemas geométricos de su época, dijo: "yo he resuelto todos los problemas".

He aquí algunos ejemplos sencillos de reducción de problemas geométricos a problemas algebraicos.

Problema. Sea ABC un triángulo dado, determinar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Resolución. Tomemos como origen de coordenadas el punto A y el eje de las abscisas en la dirección de A hacia B; entonces el punto B, tendrá las coordenadas (c, O), en que c es la longitud del segmento AB. Supongamos que el punto C tiene las coordenadas (q, h) y el centro de la circunferencia buscada, las coordenadas (a, b). Designemos por R el radio de esta circunferencia. Anotemos mediante coordenadas que los puntos $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ y $C(q, h)$ se encuentran en

la circunferencia buscada:

$$a^2+b^2=R^2,$$
$$(c-a)^2+b^2=R^2,$$
$$(q-a)^2+(h-b)^2=R^2.$$

Cada una de estas condiciones expresa que la distancia desde los puntos $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ y $C(q, h)$ al centro de la circunferencia es igual al radio. Es fácil obtener así mismo estas condiciones, escribiendo la ecuación de la circunferencia buscada (una circunferencia con centro en el punto (a, b) y con radio R):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

y reemplazando después en esta ecuación x e y por las coordenadas de los puntos A, B y C situados en esta circunferencia.

Fácilmente se resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, con lo cual se obtiene:

$$a=\frac{c}{2}, \qquad b=\frac{q^2+h^2-cq}{2h},$$
$$R=\frac{\sqrt{(q^2+h^2)\,[(q-c)^2+h^2]}}{2h}.$$

Puesto que se encontraron las coordenadas del centro [1], el problema queda resuelto.

Señalemos que, simultáneamente, hemos obtenido la fórmula para hallar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Esta fórmula se puede simplificar si se

---

[1] Observe que para resolver este problema no se recurrió al dibujo.

tiene en cuenta que

$$\sqrt{q^2+h^2}=\rho(A, C),$$
$$\sqrt{(q-c)^2+h^2}=\rho(B, C),$$

donde el valor h es igual a la altura del triángulo ABC, bajada desde el vértice C. Indicando por a y b las longitudes respectivas de los lados BC y AC del triángulo, la fórmula para calcular el radio toma una forma sencilla y elegante:

$$R=\frac{ab}{2h}.$$

Además, se puede observar que $hc=2S$, donde S es el área del triángulo ABC y, entonces, nuestra fórmula puede escribirse así:

$$R=\frac{abc}{4S}$$

Ahora le queremos mostrar a Ud. un problema que es interesante, puesto que su solución geométrica es bastante complicada; en cambio, si se traduce al lenguaje de las coordenadas su solución es muy sencilla.

Problema. Sean A y B dos puntos dados en el plano; encontrar el lugar geométrico de los puntos M, cuyas distancias al punto A son el doble que sus distancias al punto B.

Resolución. Tomemos en el plano un sistema de coordenadas tal que el origen de coordenadas coincida con el punto A y el semieje positivo de las abscisas lleve la dirección de AB. Tomemos el segmento AB por unidad de medida. Entonces el punto A tendrá las coorde-

nadas (0, 0) y el punto B, las coordenadas (1, 0). Designemos por (x, y) las coordenadas del punto M. La condición $\rho(A, M)=2\rho(B, M)$ se expresa así:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Hemos obtenido la ecuación del lugar geométrico buscado. Para comprender cual es el conjunto determinado por esta ecuación, transformaremos ésta de tal modo que tome una forma conocida por Ud. Elevando ambos miembros al cuadrado, abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos la igualdad

$$3x^2-8x+4+3y^2=0.$$

Esta puede escribirse así:

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2=\frac{4}{9}$$

o bien:

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Ud. ya sabe que ésta es la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (4/3, 0) y radio igual a 2/3. Esto significa que el lugar geométrico buscado es una circunferencia (o una parte de ella). [1]

---

[1] Para demostrar que todos los puntos de la circunferencia pertenecen a nuestro lugar geométrico es suficiente comprobar que de la validez de cada una de las siguientes igualdades se deduce la validez de la anterior; de modo que si finalmente $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, se tiene, $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2}+y^2$. Esto signi-

En nuestra solución no tiene importancia que la distancia $\rho(A,M)$ sea exactamente el doble de la distancia $\rho(B, M)$, ya que realmente el problema se ha resuelto en una forma más general. Precisamente, se ha demostrado que circunferencia, fig. 22, es *el lugar geométrico de los puntos M para los cuales la razón de sus distancias a los puntos dados A y B es constante*:

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = k \qquad (*)$$

(donde k es un número positivo dado distinto a la unidad). [1]

Para convencerse de la validez del método de coordenadas pruebe resolver geométricamente el último problema.

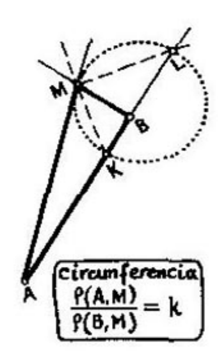


Fig. 22

Indicación Trace desde el punto M las bisectrices de los ángulos interior y exterior del triángulo AMB. Sean K y L los puntos de intersección de estas bisectrices con la recta AB. Demuestre que la posición de estos puntos es independiente de la elección del punto M en el lugar geométrico buscado. Demuestre que el ángulo KML es igual a 90°.

Es necesario señalar que los griegos ya sabían resolver problemas de este tipo. La solución geométrica de este problema estaba incluída en el tratado "Acerca de los círculos", del matemático

---

fica, precisamente, que cada punto de la circunferencia obtenida pertenece a nuestro lugar geométrico.

[1] Hemos excluído el caso $k=1$; por supuesto, ya sabe Ud. que en este caso el lugar geométrico (*) es una recta (el punto M es equidistante de A y B). Demuéstrelo analíticamente.

griego Apolonio (siglo II antes de nuestra era).

Resuelva el siguiente problema:

Problema. Encontrar el lugar geométrico de los puntos M para los cuales la diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados A y B sea igual al valor dado c. ¿Para qué valores de c tiene solución el problema?

9. Otros sistemas de coordenadas

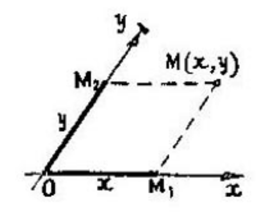


Fig. 23

Además del sistema de coordenadas cartesiano ortogonal se emplean en el plano otros sistemas de coordenadas. En la fig. 23 está representado un sistema de coordenadas cartesiano oblicuo. En la fig. se ve claramente, como se determinan las coordenadas de un punto en tal sistema. En algunos casos es absolutamente indispensable tomar diferentes unidades de medida para los ejes de coordenadas.

Existen coordenadas que se diferencian mucho más de las cartesianas. Por ejemplo, las coordenadas polares, mencionadas anteriormente.

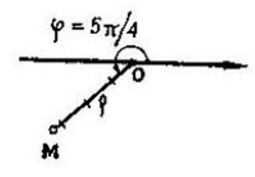
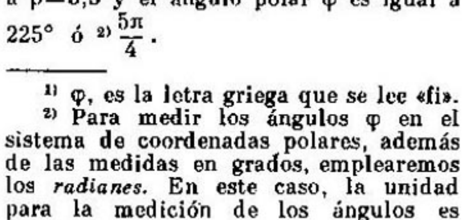


Fig. 24

Las coordenadas polares de un punto se definen en el plano de la siguiente forma: se toma en el plano un eje numérico (fig. 24). El origen de coordenadas de este eje (el punto O) se llama *polo* y el eje mismo, *eje polar*. Para determinar la situación de un punto M, es suficiente indicar dos números: ρ, *el radio vector* (la distancia del punto al polo) y φ, *el ángulo polar* [1] (el ángulo de rotación desde el eje polar hasta el rayo OM). En nuestra fig. el radio vector es igual a $\rho=3{,}5$ y el ángulo polar φ es igual a $225°$ ó [2] $\frac{5\pi}{4}$.



[1] φ, es la letra griega que se lee «fi».

[2] Para medir los ángulos φ en el sistema de coordenadas polares, además de las medidas en grados, emplearemos los *radianes*. En este caso, la unidad para la medición de los ángulos es

De este modo, en el sistema de coordenadas polares la posición de un punto en el plano queda determinada por dos números que indican la dirección en que se encuentra el punto y la distancia hasta el mismo. Este procedimiento de indicación de un lugar es muy simple y se emplea frecuentemente. Por ejemplo, para explicar el camino a una persona extraviada en el bosque se le dice: «desde el pino quemado (el polo) doble hacia el este (la dirección), recorra unos dos kilómetros (la distancia) y encontrará una caseta (el punto)».

Quien se ocupe de asuntos turísticos fácilmente comprenderá que la marcha por el azimut está basada en el mismo principio que las coordenadas polares.

Mediante las coordenadas polares se pueden además determinar en el plano, diferentes conjuntos de puntos. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia con centro en el polo (fig. 25, *a*) es muy sencilla. Si el radio de la circunferencia es igual a R, el radio polar de un punto cualquiera de la circunferencia (sólo de los puntos de la circunferencia considerada) también es igual a R; por consiguiente, la ecuación de esta circunferencia tiene la forma

$$\rho = R,$$

donde, R es una magnitud constante (abreviadamente se escribe así: R =const.).

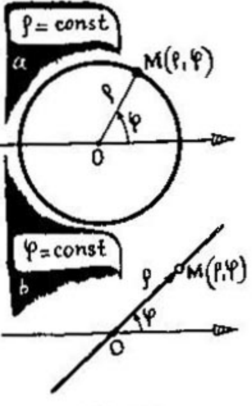
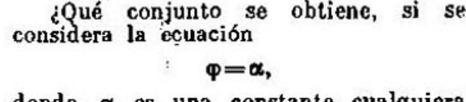


Fig. 25

---

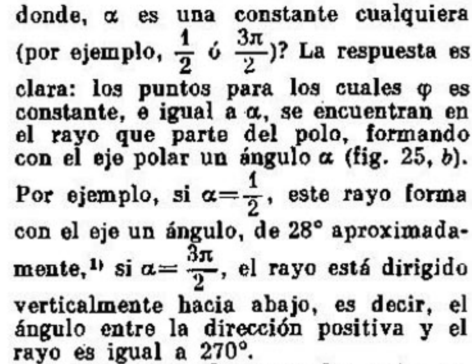
1 *radián*. Este es un ángulo central que abarca un arco de circunferencia de longitud igual al radio de la circunferencia. El ángulo completo de 360° comprende toda la circunferencia (de radio 1) y tiene la medida radial 2π; el ángulo de 180°, la medida π; el ángulo recto, la medida $\frac{\pi}{2}$; el ángulo de 45°, la medida $\frac{\pi}{4}$; etc. Un radián corresponde a $\frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°17'45''$. Resulta que, en muchos problemas (sobre los cuales se tratará en las ediciones futuras), la medición en radianes es considerablemente más cómoda que la medición en grados.





¿Qué conjunto se obtiene, si se considera la ecuación

$$\varphi=\alpha,$$



donde, α es una constante cualquiera (por ejemplo, $\frac{1}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$)? La respuesta es clara: los puntos para los cuales φ es constante, e igual a α, se encuentran en el rayo que parte del polo, formando con el eje polar un ángulo α (fig. 25, *b*). Por ejemplo, si $\alpha=\frac{1}{2}$, este rayo forma con el eje un ángulo, de 28° aproximadamente,[1] si $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, el rayo está dirigido verticalmente hacia abajo, es decir, el ángulo entre la dirección positiva y el rayo es igual a 270°.

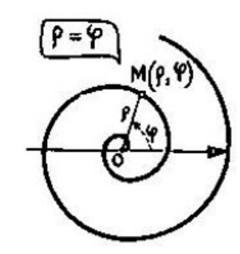


Fig. 26

Examinemos dos ejemplos más. La ecuación

$$\rho=\varphi$$

representa una espiral (fig. 26). En efecto, para $\varphi=0$, tenemos, $\rho=0$ (el polo) y junto con el crecimiento de φ crece también ρ, de modo que el punto gira alrededor del polo (en sentido contrario a las agujas del reloj), alejándose del mismo.

La ecuación

$$\rho=\frac{1}{\varphi}$$

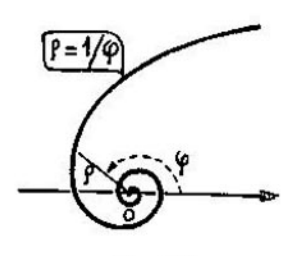
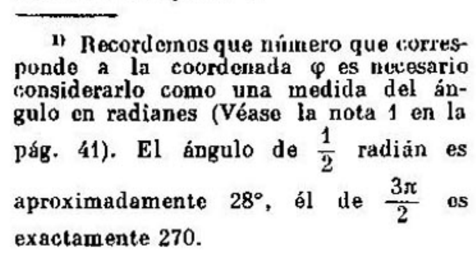


Fig. 27

representa otra espiral (fig. 27). En este caso, para un valor de φ próximo a 0, el valor de ρ es muy grande; en cambio, cuando φ crece, el valor de ρ decrece siendo muy pequeño para valores muy grandes de φ. Por esto, cuando φ crece indefinidamente, la espiral se «enrolla» alrededor del punto 0.



[1] Recordemos que número que corresponde a la coordenada φ es necesario considerarlo como una medida del ángulo en radianes (Véase la nota 1 en la pág. 41). El ángulo de $\frac{1}{2}$ radián es aproximadamente 28°, él de $\frac{3\pi}{2}$ es exactamente 270.

Ahora le será todavía más difícil comprender las ecuaciones de las curvas en un sistema polar, principalmente porque no ha estudiado trigonometría. Si Ud. sabe algo de trigonometría, trate de encontrar que conjuntos están dados por las siguientes relaciones:

$$\rho = \operatorname{sen} \varphi, \quad \rho (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) + 1 = 0$$[1].

En algunos casos el sistema de coordenadas polares es más cómodo que el cartesiano. Así, por ejemplo, vea lo simple que es la ecuación de la cardioide en coordenadas polares (Véase el apartado 7, fig. 20, pág. 36):

$$\rho = 1 - \operatorname{sen} \varphi.$$

Si Ud. sabe algo de trigonometría le será más fácil representar esta curva, cuando ella está dada por esta ecuación, que cuando está dada por su ecuación en coordenadas cartesianas. Y aquellas hermosas «flores» que se representan en la fig. 21 (véase la pág. 36) se expresan por las siguientes sencillas ecuaciones:

$$\rho = \operatorname{sen} 5\varphi \ (\text{fig. } 21,\ a)$$
$$(\rho - 2)(\rho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0 \ (\text{fig. } 21,\ b).$$

No hemos dicho nada sobre la correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y las coordenadas polares. Esto es debido a que no existe tal correspondencia biunívoca. En efecto, si le agrega al ángulo φ un múltiplo entero cualquiera de 2π (es decir, un múltiplo entero de 360°), la dirección del rayo, evidentemente, no varía. Dicho de otra forma, los puntos con las coordenadas polares ρ, φ y ρ, $\varphi + 2k\pi$, donde $\rho > 0$ y k es un número entero cualquiera, coinciden (fig. 28). Deseamos dar otro ejemplo en el que tampoco existe correspondencia biunívoca.

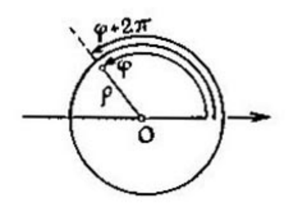


Fig. 28

En la introducción dijimos que se pueden determinar las coordenadas en las líneas y en el § 1 estudiamos las coordenadas en la línea más simple, en la

[1] Como por ρ comprendemos la distancia desde el punto hasta el origen de coordenadas, la curva sólo estará determinada para aquellos valores de φ, para los cuales se cumple $\rho \geqslant 0$.

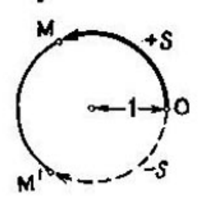


Fig. 29

recta. Ahora mostraremos, como se pueden introducir unas coordenadas en otra línea, en la circunferencia. Para esto, igual que en el § 1, elijamos en la circunferencia un punto como origen de coordenadas (el punto O en la fig. 29). Como ordinariamente, la dirección positiva del movimiento en la circunferencia se considerará en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. La unidad de medida en la circunferencia también se puede elegir de modo natural: elijamos por unidad el radio de esta circunferencia. En este caso, la coordenada del punto M en la circunferencia será la longitud del arco OM, considerada con signo positivo, si la rotación desde O hasta M es en dirección positiva; en caso contrario, con signo negativo.

Inmediatamente salta a la vista la gran diferencia entre estas coordenadas y las coordenadas de los puntos en la recta, ya que ahora no hay correspondencia biunívoca entre los números (las coordenadas) y los puntos. Es evidente que a cada número le corresponde un punto determinado de la circunferencia; sin embargo, dado el numero a, para encontrar el punto de la circunferencia que le corresponde (es decir, el punto con la coordenada a) es necesario trazar en la circunferencia un arco de longitud de a radios, en la dirección positiva, si a es positivo y en la dirección negativa, si a es negativo. En este caso, por ejemplo, el punto de coordenada 2π, coincide con el origen de coordenadas. En nuestro ejemplo, el punto O se obtiene cuando la coordenada es igual a cero y cuando la coordenada es igual a 2π. De esta forma, en la otra dirección la correspondencia no es unívoca, ya que a un mismo punto le corresponden varios números diferentes. Fácilmente se observa que a cada punto de la circunferencia le corresponde un conjunto infinito de números[1].

[1] Ud. podrá observar que las coordenadas introducidas de un punto en la circunferencia coinciden con los ángulos φ del sistema de coordenadas

§ 3. Las coordenadas del punto en el espacio

10. Los ejes y los planos coordenados

La posición de un punto en el espacio también se puede determinar mediante las coordenadas cartesianas rectangulares, sólo que es necesario considerar tres ejes numéricos en vez de dos (como en el caso del plano); el eje x o *eje de las abscisas*; el eje y o *eje de las ordenadas*; el eje z o *eje de las cotas*. Estos ejes pasan por un mismo punto por *el origen de coordenadas* O, de modo que cada dos de ellos son perpendiculares entre sí.



El punto O se considera como el origen de referencia de cada uno de los tres ejes. Generalmente, la dirección de los ejes se elige de modo que el semieje positivo x coincida con el semieje positivo y, después de haber girado el primero en 90° en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, mirando desde el semieje positivo z (fig. 30).

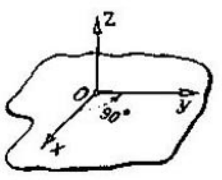


Fig. 30

Es conveniente examinar en el espacio, además de los ejes de coordenadas, *los planos de coordenadas*, es decir, los planos que pasan por dos ejes de coordenadas cualesquiera. Estos planos son tres (fig. 31); el plano xy (que pasa por los ejes x e y), o sea, el con-

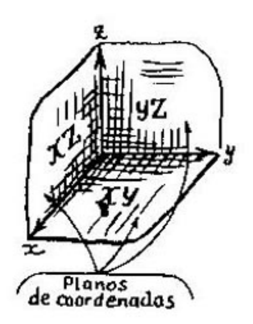


Fig. 31

---

polares, si estos últimos se miden en radianes; por esto, nuevamente se ve aquí la ausencia de valores unívocos en las coordenadas polares.

junto de puntos de la forma (x, y, 0), donde x e y son números arbitrarios, el plano xz (que pasa por los ejes x y z), o sea, el conjunto de puntos de la forma (x, 0, z), donde x y z son números arbitrarios; el plano yz (que pasa por los ejes y y z), o sea, el conjunto de puntos de la forma (0, y, z), donde y y z son números arbitrarios.

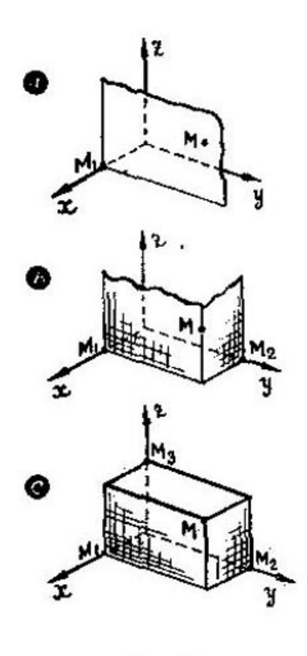


Fig. 32

Ahora es posible encontrar, para cada punto M del espacio, los tres números x, y y z, que serán sus coordenadas.

Para encontrar el primer número x, se traza por el punto M un plano paralelo al plano de coordenadas yz (simultáneamente este plano será perpendicular al eje x). El punto de intersección de este plano con el eje x (el punto M_1 en la fig. 32, *a*) tiene la coordenada x en este eje. Este número x, la coordenada del punto M_1 en el eje x, se llama *abscisa* del punto M.

Para encontrar la segunda coordenada, se traza por el punto M un plano paralelo al plano xz (y perpendicular al eje y) hallándose el punto M_2 en el eje y (fig. 32, *b*). El número y, la coordenada del punto M_2 en el eje y, se llama *ordenada* del punto M.

Análogamente, al trazar por el punto M un plano paralelo al plano xy (y perpendicular al eje z) se encuentra el número z, la coordenada del punto M_3 (fig. 32, *c*) en el eje z. Este número z se llama *cota* del punto M.

De este modo, a cada punto del espacio le hemos puesto en

correspondencia un conjunto determinado de tres números, sus coordenadas: la abscisa, la ordenada y la cota.

Recíprocamente a cada conjunto de tres números (x, y, z) dados en un orden determinado (primero x, después y y finalmente z) se le puede poner en correspondencia un punto determinado del espacio M. Para esto es necesario emplear la construcción descrita, pero empezando por el final; se marcan en los ejes los puntos M_1, M_2 y M_3 que tienen en estos ejes las correspondientes coordenadas x, y y z; después se trazan por estos puntos planos paralelos a los planos de coordenadas. El punto de intersección de estos tres planos será el punto buscado M. Evidentemente, los números (x, y, z) serán sus coordenadas.

Así pues, hemos establecido correspondencia biunívoca [1] entre los puntos del espacio y los conjuntos ordenados de tres números (las coordenadas de estos puntos).



A Ud. le será más difícil habituarse a las coordenadas del espacio que a las del plano, pues para el estudio de las coordenadas en el espacio es necesario tener un leve conocimiento de la geometría del espacio, o sea, de la estereometría. Los conocimientos esenciales para la comprensión de las coordenadas en el espacio, que Ud. fácilmente captará por su simplicidad y evidencia, se fundamentan más es-

---

[1] Véase en la pág. 11 la definición de correspondencia biunívoca.

trictamente en el curso de estereometría.

En este curso se demostrará que los puntos M_1, M_2 y M_3 obtenidos como puntos de intersección de los ejes de coordenadas con los planos paralelos a los planos de coordenadas, trazados por el punto M, son las proyecciones sobre los ejes de coordenadas del punto M, es decir, son los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto M a los ejes de coordenadas. De este modo, las coordenadas del espacio se pueden definir análogamente, como se definieron las coordenadas de un punto en el plano, esto es:

Las coordenadas del punto M en el espacio son las coordenadas de las proyecciones de este punto sobre los ejes de coordenadas.

Se puede demostrar que muchas fórmulas deducidas para el plano son aplicables al caso del espacio, haciendo en ellas unas pequeñas variaciones.

Así, por ejemplo, la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ se calcula por la fórmula

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(La deducción de esta fórmula se parece mucho a la deducción de la fórmula para el plano. Trate de hacerla).

En particular, la distancia entre el punto $A(x, y, z)$ y el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ se calcula por la fórmula



$$\rho(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ejercicios

1. Tomemos ocho puntos: (1, 1, 1), (1, 1, —1), (1, —1, 1), (1, —1, —1), (—1, 1, 1), (—1, 1, —1), (—1, —1, 1), (—1, —1, —1).

a) ¿Cuál es el punto más alejado del punto (1, 1, 1)? Calcule la distancia entre este punto y el punto (1, 1, 1). b) ¿Cuáles son los puntos más próximos al punto (1, 1, 1)? ¿Cuál es la distancia entre estos puntos y el punto (1, 1, 1)?

2. Dibuje un cubo. Dirija los ejes de coordenadas en la dirección de las tres aristas que parten de un mismo vértice. Tome por unidad de medida la arista del cubo. Designe los vértices del cubo con las letras A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, como en la fig. 33.

a) Encontrar las coordenadas de todos los vértices del cubo.

b) Hallar las coordenadas del punto medio de la arista CC_1.

c) Encontrar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales de la cara AA_1B_1B.

3. ¿Cuál es la distancia entre el vértice (O, O, O) del cubo del problema 2 y el punto de intersección de las diagonales de la cara BB_1C_1C?

4. ¿Cuáles de los siguientes puntos cree Ud. que se encuentran en el interior del cubo del problema 2 y cuáles en el exterior?

$$A(1, 0, 5),\ B(3, 0, 1),\ C\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right),$$
$$D\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),\ E\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$
$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

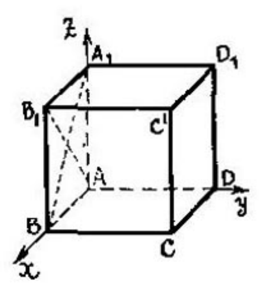


Fig. 33

5. Escriba las relaciones que satisfacen las coordenadas de los puntos que yacen en el interior del cubo del problema 2 y en sus caras.

Respuesta. Las coordenadas x, y, z de los puntos que yacen en el interior del cubo considerado y en sus caras pueden tener valores numéricos entre cero y la unidad inclusive, es decir, cumplen las condiciones:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

11. *Determinación de las figuras en el espacio*

Las coordenadas del espacio, así como las del plano, dan la posibilidad de expresar mediante números y relaciones numéricas, además de los puntos, también las líneas, superficies y otros conjuntos de puntos. Por ejemplo, veamos que conjunto de puntos se obtiene si se dan sólo dos coordenadas y se supone la tercera arbitraria. Las condiciones

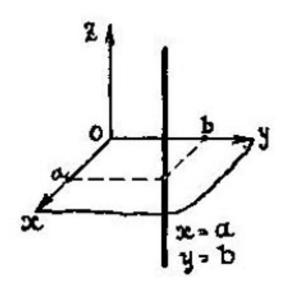


Fig. 34

$$x = a, \quad y = b,$$

donde a y b son números dados (por ejemplo, $a = 5$, $b = 4$), determinan en el espacio una recta paralela al eje z (fig. 34). Todos los puntos de esta recta tienen una misma abscisa y una misma ordenada. La coordenada z puede tomar cualquier valor.

Así mismo, las condiciones

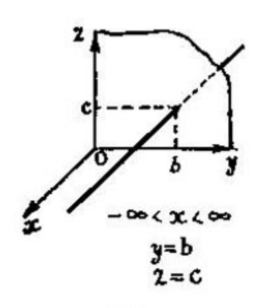


Fig. 35

$$y = b, \quad z = c$$

determinan una recta paralela al eje x (fig. 35) y las condiciones

$$z = c, \quad x = a,$$

una recta paralela al eje y (fig. 36).

Es interesante saber, ¿cuál es el conjunto de puntos obtenidos, cuando se da una sola coordenada, por ejemplo,

$$z = 1?$$

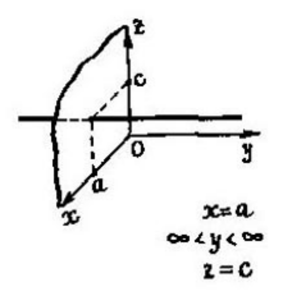


Fig. 36

La respuesta es evidente en la fig. 37; es un plano paralelo al plano de coordenadas xy (o sea, al plano que pasa por el eje x y por el eje y) y que se encuentra a la distancia 1 en la dirección positiva del semieje z.

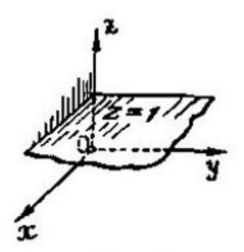


Fig. 37

He aquí otros ejemplos, que muestran como se puede expresar en el espacio diferentes conjuntos, por medio de ecuaciones y otras relaciones entre las coordenadas.

1. Veamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (*)$$

Como la fórmula $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, expresa la distancia entre el punto $(x; y, z)$ y el origen de coordenadas, al traducir al lenguaje geométrico la relación (*) significa que el punto de coordenadas (x, y, z) que satisface a esta relación se encuentra a la distancia R del origen de coordenadas. Por consiguiente, el conjunto de todos los puntos, para los cuales se cumple la relación (*), es la superficie de la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio R.

2. ¿Dónde están situados los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la relación

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1?$$

Como esta relación expresa que la distancia del punto (x, y, z) al origen de coordenadas es menor que la unidad, el conjunto buscado es el conjunto de los puntos que se encuentran en el interior de la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio igual a la unidad.

3. ¿Qué conjunto de puntos determina la ecuación

$$x^2+y^2=1? \qquad (**)$$

Examinemos, en primer lugar solamente los puntos del plano xy que satisfacen a esta relación, es decir, los puntos para los cuales $z=0$. Entonces, como vimos anteriormente (pág. 31), la ecuación (**) determina una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a la unidad; para cada uno de estos puntos la coordenada z es igual a cero y las coordenadas x e y satisfacen a la relación (**); por ejemplo, el punto $P(3/5,\ 4/5,\ 0)$ satisface a esta ecuación (fig. 38). A pesar de conocer sólo este punto, podemos encontrar inmediatamente varios puntos que satisfacen a esta misma ecuación. En efecto, como la ecuación (**) no contiene z, el punto $(3/5,\ 4/5,\ 10)$ satisface a esta ecuación, así como el punto $(3/5,\ 4/5,\ -5)$, y en general, todos los puntos $Q(3/5,\ 4/5,\ z)$ en los que el valor de la coordenada z es absolutamente arbitrario. Todos estos puntos pertenecen a la recta paralela al eje z que pasa por el punto $(3/5,\ 4/5,\ 0)$.

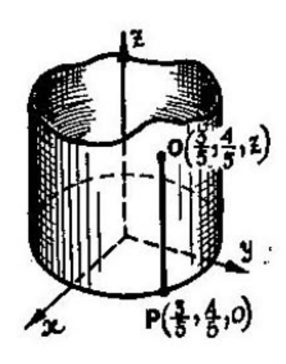


Fig. 38

De esta forma, podemos obtener

de cada uno de los puntos (x^*, y^*, 0) de nuestra circunferencia, perteneciente al plano xy, muchos puntos que satisfacen a la ecuación (**). Tracemos por este punto de la circunferencia una recta paralela al eje z. Todos los puntos de esta recta tendrán el mismo valor x e y que tiene el punto de la circunferencia, en cambio z puede ser arbitrario, es decir, estos puntos serán de la forma (x^*, y^*, z). Pero, como z no está contenido en la ecuación (**) y los números (x^*, y^*, 0) satisfacen a esta ecuación, los números (x^*, y^*, z) también satisfacerán a la ecuación (**). Es evidente que por este procedimiento se puede obtener un punto cualquiera que satisface a la ecuación (**).

En consecuencia, el conjunto de puntos determinado por la ecuación(**) se obtiene de la siguiente forma: se toma en el plano xy una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio,igual a la unidad y por cada punto de esta circunferencia se traza una recta paralela al eje z. De este modo, obtenemos la superficie denominada *superficie cilíndrica* (fig. 38).

4. Hemos visto que, por lo general, una ecuación determina en el espacio una superficie; pero esto no es siempre así.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

es satisfecha sólo por los puntos de una línea: el eje z, puesto que de la ecuación se deduce que x e y son iguales a cero, y todos los

puntos para los cuales estas coordenadas son iguales a cero, pertenecen al eje z.

La ecuación

$$x^2+y^2+z^2=0$$

representa un punto (el origen de coordenadas) y a la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=-1$$

corresponde un conjunto vacío.

5. ¿Qué sucederá si se estudian los puntos, cuyas coordenadas satisfacen no a una ecuación, sino a un sistema de ecuaciones?

Veamos el sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=1. \end{cases} \qquad (***)$$

Los puntos que satisfacen a la primera ecuación pertenecen a la superficie de la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 2. Los puntos que satisfacen a la segunda ecuación se encuentran en el plano paralelo al plano xy y ubicado a una distancia igual a la unidad, en la dirección positiva del eje z. Los puntos que satisfacen a la primera y a la segunda ecuación deben pertenecer a la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y al plano $z=1$, es decir, se encuentran en la línea de su intersección. De este modo, este sistema determina una circunferencia, la cual es la línea de intersección de la esfera y del plano (fig. 39).

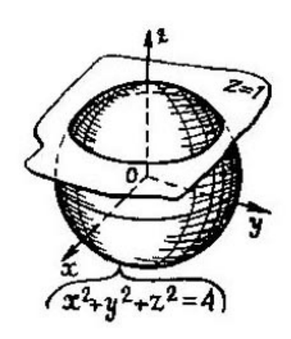


Fig. 39

Vemos, pues, que cada una de las ecuaciones del sistema determina una superficie y ambas ecuaciones, es decir, el sistema, dan una línea.

Pregunta. ¿Cuáles de los puntos indicados más abajo pertenecen a la primera superficie, cuáles a la segunda y cuáles a la línea de su intersección

$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D(1, \sqrt{3}, 0)$, $E(0, \sqrt{3}, 1)$, $F(-1, -\sqrt{2}, 1)$?

6. ¿Cómo se puede expresar en el espacio una circunferencia situada en el plano xz, con centro en el origen de coordenadas y radio igual a la unidad?

Como ya vimos, la ecuación $x^2+z^2=1$ determina una superficie cilíndrica en el espacio. Para obtener los puntos de la circunferencia que nos es indispensable, es necesario agregarle a esta ecuación la condición $y=0$; de este modo se separan de todos los puntos del cilindro los puntos pertenecientes al plano xz (fig. 40). Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x^2+z^2=1, \\ y=0. \end{cases}$$

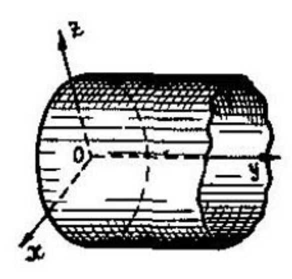


Fig. 40

Ejercicios.

1. ¿Qué conjuntos de puntos determinan en el espacio las ecuaciones:

a) $z^2=1$;

b) $y^2+z^2=1$;

c) $x^2+y^2+z^2=1$?

2. Se tienen tres sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y^2+z^2=1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2+z^3=1, \\ x=0. \end{cases}$

¿Cuáles de estos sistemas determinan una misma línea y cuáles determinan diferentes líneas?

3. ¿Cómo se puede expresar en el espacio la ecuación de la bisectriz del ángulo xOy? ¿Qué conjunto determina en el espacio la ecuación $x=y$?

Capítulo II

§ 1. Introducción

Como Ud. sabe ahora algo del método de coordenadas, podemos conversar sobre algunas cosas interesantes que están estrechamente relacionadas con la matemática moderna.

1. Algunas ideas generales

El álgebra y la geometría que son consideradas ahora por la mayoría de los escolares como ciencias absolutamente distintas están en realidad muy próximas. Mediante el método de coordenadas empleando sólo los números y las operaciones algebraicas, y sin hacer ningún dibujo, se podría exponer todo el curso escolar de geometría. El curso de planimetría comenzaría con estas palabras: "Se llama punto el par de números (x, y) ...". Después se podría definir la circunferencia como el conjunto de puntos que satisfacen a la ecuación de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. La línea recta sería el conjunto de puntos que satisfacen a la ecuación $ax+by+c=0$. Muchas otras figuras se podrían caracterizar así mismo mediante sistemas de ecuaciones y desigualdades. Con esto, todos los teoremas geométricos se transformarían en unas cuantas relaciones algebraicas. En las siguientes publicaciones les contaremos detalladamente cómo se hace esto.

El establecimiento de la relación existente entre el álgebra por una parte, y la geometría por otra representó una revolución en las matemáticas. Esto convirtió a las matemáticas en una ciencia única, en la cual no existe "una muralla china" entre cada una de sus partes.

El filósofo y matemático francés René Descartes (1596—1650) es considerado como creador del método de coordenadas. En la última parte del gran tratado de filosofía de Descartes, editado en el año 1637, se da una descripción del método de coordenadas y su aplicación a la solución de problemas geométricos. El desarrollo de las ideas de Descartes dio origen a una rama especial de las matemáticas: la geometría analítica.

La denominación misma expresa la idea fundamental de la teoría. La geometría analítica es aquella parte de las matemáticas que resuelve problemas geométricos por medios analíticos (o sea, algebraicos). Aunque la geometría analítica es ahora una parte de las matemáticas totalmente desarrollada y terminada, las ideas contenidas en sus fundamentos dieron origen a nuevas ramas de las matemáticas. Surgió y se desarrolla la geometría algebraica, que estudia las propiedades de las líneas y de las superficies expresadas mediante ecuaciones algebraicas. De ninguna manera se puede considerar terminada esta parte de las matemáticas, ya que justamente en los últimos años se han obtenido nuevos resultados fundamentales, los

cuales han ejercido una gran influencia en otras ramas de las matemáticas.

2. *La geometría nos ayuda a contar*

Cuando se resuelven problemas geométricos aparece en primer plano un aspecto del método de coordenadas: la explicación analítica de los conceptos geométricos, o sea, la traducción al lenguaje de los números de las relaciones y figuras geométricas. Sin embargo, el otro aspecto del método de coordenadas, la interpretación geométrica de los números y de las relaciones numéricas, adquirió un valor no menos significativo. El eminente matemático **Herman Minkowski** (1864—1909) empleó un enfoque geométrico en la resolución de ecuaciones con números enteros. Los matemáticos de su tiempo quedaron asombrados ya que algunos problemas de la teoría de números que antes parecían muy difíciles resultaron tan simples y evidentes.

Veamos un ejemplo absolutamente sencillo que demuestra cómo la geometría ayuda a resolver problemas algebraicos.

Problema. Consideremos la desigualdad

$$x^2 + y^2 \leqslant n.$$

donde, n es un número entero positivo cualquiera. Se pregunta: ¿Cuántas soluciones en números enteros (N) tiene esta inecuación?

Resolución. Es fácil responder a esta pregunta para valores pe-

n	N	N/n
0	1	–
1	5	5
2	9	4,5
3	9	3
4	13	3,25
5	21	4,2
10	37	3,7
20	69	3,45
50	161	3,22
100	317	3,17

queños de n. Por ejemplo, para $n=0$, se tiene una sola solución: $x=0$, $y=0$. Para $n=1$ hay que agregar a esta solución otras cuatro soluciones: $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$; $x=0$, $y=-1$ y $x=-1$, $y=0$; por consiguiente se tendrán en total cinco soluciones.

Para $n=2$, además de las soluciones señaladas, se tienen otras cuatro soluciones: $x=1$, $y=1$; $x=-1$, $y=1$; $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=-1$. Para $n=2$ se tienen en total nueve soluciones. Continuando de este modo se puede formar una tabla.

Vemos, pues, que el número de soluciones N aumenta, al aumentar n, pero es bastante difícil hallar una ley exacta para la variación de N. Observando la columna derecha de la tabla, podemos suponer que la razón N/n tiende a un número determinado, cuando crece n.

Mediante la interpretación geométrica demostraremos en seguida que, en efecto, la razón N/n tiende al conocido número $\pi=3{,}14159265\ldots$

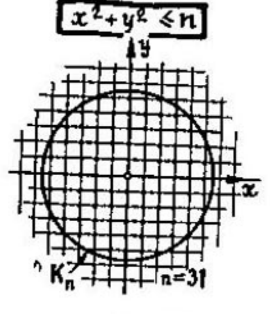


Fig. 41

Consideremos el par de números (x, y) como un punto en el plano (con abscisa x y ordenada y). La desigualdad $x^2+y^2 \leqslant n$ expresa que el punto (x, y) pertenece al círculo K_n con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{n}$ (véase la fig. 41, en la cual se ha considerado $n=31$). Por lo tanto, nuestra inecuación tiene tantas soluciones en números enteros, cuantos puntos con coordenadas enteras estén contenidos en el interior del círculo K_n o en su contorno.

Es evidente geométricamente que los puntos con coordenadas enteras "están uniformemente distribuidos en el plano" y que en una unidad de área está contenido un solo punto. Por esto queda claro que el número de soluciones debe ser aproximadamente igual al área del círculo. Así, pues, obtenemos la fórmula aproximada:

$$N \approx \pi n.$$

He aquí una demostración abreviada de esta fórmula. Dividamos el plano, por medio de rectas paralelas a los ejes de coordenadas, en pequeños cuadrados unitarios y supongamos que los puntos correspondientes a los números enteros son los vértices de estos cuadrados. Supongamos que en el interior del círculo K_n resultaron N puntos de los números enteros,[1] a cada uno de estos puntos le hacemos corresponder el cuadradito unitario para el cual el punto considerado es el vértice superior derecho. Designemos con A_n la figura formada por estos pequeños cuadrados (fig. 42). Es evidente que el área de A_n es igual a N (es decir, al número de cuadraditos que componen esta figura).

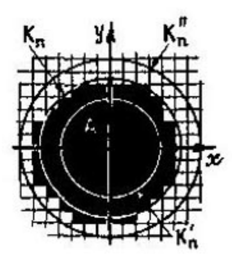


Fig. 42

Comparemos el área de esta figura con el área del círculo K_n. Veamos, simultáneamente con el círculo K_n, otros dos círculos con centro en el origen de coordenadas: el círculo K'_n de radio $\sqrt{n}-\sqrt{2}$ y el círculo K''_n de radio $\sqrt{n}+\sqrt{2}$. La figura A_n está totalmente contenida en el círculo K'_n y comprende en su interior al círculo K''_n (demuestre esto aplicando el teorema: «en un triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de los otros dos»). Por esto, el área de A_n es mayor que el área de K'_n y menor que el área de K''_n, es decir,

$$\pi(\sqrt{n}-\sqrt{2})^2 < N < \pi(\sqrt{n}+\sqrt{2})^2.$$

[1] Nota del R. Para abreviar llamaremos puntos enteros, aquellos cuyas coordenadas son números enteros.

De esto se deduce nuestra fórmula de aproximación, $N \approx \pi n$, con la estimación del error:

$$|N - \pi n| < 2\pi(\sqrt{2n} + 1).$$

Estudiemos ahora un problema similar, pero con tres incógnitas. ¿Cuántas soluciones en forma de números enteros tiene la inecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant n?$$

Si aplicamos de nuevo la interpretación geométrica, la respuesta se obtiene inmediatamente. El número de soluciones enteras es aproximadamente igual al volumen de una esfera de radio $\sqrt{n}$, es decir, $\frac{4}{3}\pi n\sqrt{n}$. Sería difícil obtener este resultado por medios puramente algebraicos.

3. Es necesario introducir el espacio de cuatro dimensiones

¿Cómo proceder si se necesita encontrar el número de soluciones en forma de números enteros de la inecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant n,$$

la cual contiene cuatro incógnitas? Cuando resolvíamos este problema para dos y tres incógnitas aplicábamos una interpretación geométrica. La solución de la inecuación con dos incógnitas, o sea, el par de números, se interpretaba como un punto en el plano; la solución de la inecuación con tres incógnitas, o sea, el conjunto de tres números, como un punto en el espacio. ¿Se podrá seguir aplicando este procedimiento? En

ese caso, sería necesario considerar a los cuatro números (x, y, z, u) como un punto de un espacio que tiene cuatro dimensiones (*de un espacio de cuatro dimensiones*). Entonces se puede considerar que la desigualdad $x^2+y^2+z^2+t^2 \leqslant n$ implica que el punto (x, y, z, t) esté contenido en el interior de una esfera de cuatro dimensiones con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{n}$. Después sería necesario dividir el espacio de cuatro dimensiones en cubitos de cuatro dimensiones y, finalmente, necesitaríamos calcular el volumen de una esfera de cuatro dimensiones[1]. En otras palabras, debíamos comenzar a desarrollar la geometría del espacio de cuatro dimensiones.

En esta edición no haremos todo esto; sólo entreabriremos un poco la puerta del espacio de cuatro dimensiones y le presentaremos en él una figura más simple, el cubo de cuatro dimensiones.

Por supuesto, a Ud. le interesan las siguientes preguntas: ¿hasta qué punto se puede hablar seria-

[1] En nuestras publicaciones no nos ocuparemos de la deducción de la fórmula para calcular el volumen de una esfera de cuatro dimensiones, sin embargo daremos su fórmula. El volumen de una esfera de cuatro dimensiones es igual a $\frac{\pi^2 R^4}{2}$. Para comparar, señalemos además que el volumen de la esfera de cinco dimensiones es igual a $\frac{8\pi^2 R^5}{15}$, él de seis dimensiones es igual a $\frac{\pi^3 R^6}{6}$ y él de siete, a $\frac{16\pi^3 R^7}{105}$.

mente de este espacio imaginario de cuatro dimensiones? ¿hasta dónde se puede desarrollar una geometría de este espacio, similar a la geometría corriente, y cuáles serán las similitudes y diferencias entre la geometría tridimensional y la de cuatro dimensiones? Al estudiar estas preguntas los matemáticos obtuvieron las siguientes respuestas: sí, es posible desarrollar una geometría tal que en muchos aspectos se parezca a la geometría corriente. Además, esta geometría comprende la geometría corriente como una parte integrante de ella, así como a la estereometría (la geometría del espacio) contiene a la planimetría. Por supuesto, la geometría de cuatro dimensiones tendrá muchas diferencias esenciales con la geometría corriente. Algunas singularidades muy interesantes del mundo de cuatro dimensiones narraba en uno de sus relatos el escritor de novelas de ficción científica, Herbert Wells.

Pero ahora le demostraremos que en realidad estas singularidades se parecen mucho a aquéllas que diferencian la geometría del espacio tridimensional de la geometría del espacio bidimensional.

4. *Singularidades del espacio de cuatro dimensiones*

Dibuje un círculo en el plano y figúrese que Ud. es un ser imaginario del mundo bidimensional, que puede moverse por el plano, pero no tiene derecho a salir al espacio (inclusive, Ud. no sabe que existe el espacio y, por lo

tanto, no puede imaginárselo). De tal modo que el contorno del círculo, la circunferencia, le será una barrera invencible y Ud. no podrá salir del círculo, porque la circunferencia en todas partes le cerrará el paso (fig. 43, *a*).

Imagínese ahora que este plano, con el círculo dibujado, se introduce en un espacio tridimensional y que Ud. intuye la existencia de la tercera dimensión; por supuesto, ahora sin ninguna dificultad saldrá Ud. de los límites del círculo, por ejemplo, simplemente, atravesará la circunferencia (fig. 43, *b*).

Supongamos que ahora es Ud. un ser del mundo tridimensional y que se encuentra en el interior de una esfera, cuya frontera es impenetrable; entonces, no podrá salir de los límites de esta esfera (fig. 43, *b*). Pero si la esfera está situada en un espacio de cuatro dimensiones y Ud. captó la existencia de esta cuarta dimensión, entonces sin ningún esfuerzo podrá Ud. salir de los límites de la esfera.

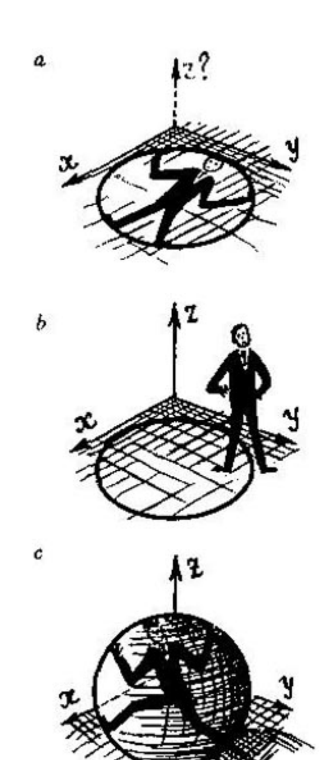


Fig. 43

En esto no hay nada particularmente místico, sino que sencillamente la frontera de la esfera tridimensional no divide en dos partes el espacio de cuatro dimensiones, a pesar de que divide el espacio tridimensional. Esto es absolutamente análogo al caso de la frontera del círculo (la circunferencia), la cual no divide en dos partes el espacio tridimensional, a pesar de que divide el plano (al cual ella pertenece).

He aquí otro ejemplo: es evidente que no se pueden hacer coincidir dos figuras simétricas entre sí en el plano, si sólo se pueden mover sin salirse de los límites del plano. Sin embargo, una mariposa en reposo puede plegar las alas, haciéndolas salir del plano horizontal al vertical (véase el dibujo en la solapa). Así mismo, no se pueden hacer coincidir en el espacio tridimensional figuras simétricas espaciales. Por ejemplo, ya puede dar las vueltas que quiera a un guante izquierdo, no lo convertirá en derecho, a pesar de ser figuras geométricas iguales. Sin embargo, las figuras simétricas tridimensionales se pueden hacer coincidir en un espacio de cuatro dimensiones del mismo modo que se hacen coincidir las figuras simétricas planas si se ponen en un espacio tridimensional.

Por esto, no tiene nada de asombroso que el héroe del relato antes mencionado de Wells, después de su viaje por el espacio de cuatro dimensiones resultó totalmente cambiado, pero en forma simétrica consigo mismo; por ejemplo, el corazón le resultó a la derecha. Esto sucedió porque al salir al espacio de cuatro dimensiones se volvió al lado contrario (en forma similar, el guante izquierdo se transformaría en el derecho si se le volviera al revés).

5. Algo sobre física

La geometría de cuatro dimensiones resultó ser un aparato extraordinariamente útil e insusti-

tuíble en la física moderna. Sin el aparato de la geometría imaginaria de varias dimensiones sería muy difícil explicar y aplicar, una rama tan esencial de la física moderna como es la teoría de la relatividad de Alberto Einstein.

Cualquier matemático puede envidiar a Minkowski, quien después de aplicar con tanto éxito la geometría a la teoría de los números supo nuevamente aclarar dificilísimos problemas matemáticos referentes a la teoría de la relatividad, por medio de consideraciones geométricas intuitivas. Uno de los fundamentos de la teoría de la relatividad es el concepto de la unión inquebrantable del espacio y del tiempo. Por esto, es propio considerar el momento de tiempo en el cual ha transcurrido algún suceso como la cuarta coordenada de este suceso junto con las tres primeras que determinan el punto del espacio en el que tiene lugar este suceso.

El espacio de cuatro dimensiones obtenido se llama *espacio de Minkowski*. Hoy día, un curso cualquiera de teoría de la relatividad comienza con una descripción de este espacio. El descubrimiento de Minkowski consiste en que las fórmulas básicas de la teoría de la relatividad, las fórmulas de Lorents, expresadas en el lenguaje de las coordenadas de este espacio de cuatro dimensiones, son extraordinariamente simples.

De este modo, para la física moderna fue una gran suerte que, cuando se descubrió la teoría de

la relatividad, los matemáticos ya habían preparado la geometría de varias dimensiones, un aparato cómodo, compacto y bello, el cual en muchos casos simplifica considerablemente la resolución de problemas.

§ 2. El espacio de cuatro dimensiones

Finalmente, como habíamos prometido, le contaremos a Ud. algo de la geometría del espacio de cuatro dimensiones.

Cuando construimos la geometría de la recta, del plano y del espacio tridimensional tenemos dos posibilidades: o exponer el material mediante representaciones intuitivas (este procedimiento es característico para el curso escolar, por lo cual es difícil imaginarse un texto de geometría sin dibujos), o exponerlo analíticamente (el método de coordenadas nos da esta posibilidad), llamando, por ejemplo, en el curso de planimetría, al punto del plano, par de números (las coordenadas de este punto) y al punto del espacio, un conjunto de tres números.

Cuando se introduce el espacio de cuatro dimensiones, la primera posibilidad no existe. No podemos emplear directamente representaciones geométricas intuitivas, pues el espacio que nos rodea sólo tiene tres dimensiones; sin embargo, tenemos abierto el segundo camino. En efecto, hemos definido el punto de la recta como un número, el punto del plano como un par de

números y el punto del espacio tridimensional como un conjunto de tres números. Por esto, es absolutamente propio construir la geometría del espacio de cuatro dimensiones definiendo el punto de este espacio imaginario como un conjunto de cuatro números. Se deberá comprender por figura geométrica en tal espacio a un cierto conjunto de puntos (por cierto, igual que en el caso de la geometría corriente). Precisemos ahora algunas definiciones.

6. *Ejes y planos coordenados*



Definición. Se llama *punto* en el espacio de cuatro dimensiones el conjunto de los cuatros números ordenados [1] (x, y, z, t).

¿Qué se debe considerar en el espacio de cuatro dimensiones como ejes de coordenadas y cuántos son?

Para responder a esta pregunta, volvamos brevemente al plano y al espacio de tres dimensiones.

En el plano (es decir, en el espacio de dos dimensiones), los ejes de coordenadas son los conjuntos de puntos en los cuales una de las coordenadas puede tomar cualquier valor numérico y la segunda es igual a cero. Así, pues, el eje de abscisas es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0)$, donde x es un número arbitrario. Por ejemplo, al eje de las abscisas pertenecen

[1] Decimos «ordenado» ya que para distinta situación de los mismos números en el conjunto de cuatro números se obtienen diferentes puntos; por ejemplo, el punto $(1, -2, 3, 8)$ es distinto del punto $(3, 1, 8, -2)$.

los puntos $(1,0)$, $(-3, 0)$, $(2\frac{1}{3}, 0)$, mientras que el punto $(^1/_5, 2)$ no pertenece. El eje de las ordenadas dei plano es el conjunto de puntos de la forma $(0, y)$, donde y es un número arbitrario.
En el espacio tridimensional hay tres ejes:
el eje x es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, 0)$, donde x es un número arbitrario;
el eje y es el conjunto de puntos de la forma $(0, y, 0)$, donde y es un número arbitrario;
el eje z es el conjunto de puntos de la forma $(0, 0, z)$, donde z es un número arbitrario.

En el espacio de cuatro dimensiones, formado de todos los puntos de la forma (x, y, z, t), donde x, y, z, t son números arbitrarios, es propio considerar como *ejes de coordenadas* a aquellos conjuntos de puntos en los cuales una de las coordenadas toma cualquier valor numérico y las otras son iguales a cero. Entonces, es evidente que en el espacio de cuatro dimensiones hay cuatro ejes de coordenadas:
el eje x, es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, 0, 0)$, donde x es un número arbitrario,
el eje y, es el conjunto de puntos de la forma $(0, y, 0, 0)$, donde y es un número arbitrario;
el eje z, es el conjunto de puntos de la forma $(0, 0, z, 0)$, donde z es un número arbitrario;
el eje t, es el conjunto de puntos de la forma $(0, 0, 0, t)$, donde t es un número arbitrario.

En el espacio tridimensional, además de los ejes de coordenadas se tienen *los planos de coordenadas*. Estos son los planos que pasan por cada dos ejes de coordenadas cualesquiera. Por ejemplo, el plano yz, es el plano que pasa por el eje y y por el eje z.

En el espacio tridimensional, en total hay tres planos de coordenadas:

el plano xy, que es el conjunto de puntos de la forma $(x, y, 0)$, donde x e y son números arbitrarios;

el plano yz, que es el conjunto de puntos de la forma $(0, y, z)$, donde y y z son números arbitrarios;

el plano xz, que es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z)$, donde x y z son números arbitrarios.

En el espacio de cuatro dimensiones es natural llamar *planos de coordenadas* a los conjuntos de puntos en los cuales dos coordenadas cualesquiera de las cuatro toman valores numéricos arbitrarios y las coordenadas restantes son iguales a cero. Por ejemplo, el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z, 0)$ lo llamaremos plano de coordenadas xz del espacio de cuatro dimensiones. ¿Cuántos planos de este tipo hay en total?

Esto es fácil de averiguar; ahora simplemente escribiremos todos ellos:

el plano xy, es el conjunto de puntos de la forma $(x, y, 0, 0)$,

el plano xz, es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z, 0)$,

el plano xt, es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, 0, t)$,
el plano yz, es el conjunto de puntos de la forma $(0, y, z, 0)$,
el plano yt, es el conjunto de puntos de la forma $(0, y, 0, t)$,
el plano zt, es el conjunto de puntos de la forma $(0, 0, z, t)$.

Las coordenadas variables para cada uno de estos planos pueden tomar cualquier valor numérico, inclusive cero. Por ejemplo, el punto (5, 0, 0, 0) pertenece tanto al plano xy como al plano xt (¿y a qué otro plano?). Fácilmente se observa que el plano yz, por ejemplo, "pasa" por el eje y, en atención que cada punto de este eje pertenece a este plano. En efecto, cualquier punto del eje y, o sea, un punto de la forma $(0, y, 0, 0)$, pertenece al conjunto de puntos de la forma $(0, y, z, 0)$, es decir, al plano yz.

Pregunta. ¿Qué conjunto forman los puntos que pertenecen simultáneamente al plano yz y al plano xz?

Respuesta. Este conjunto está formado por todos los puntos de la forma $(0, 0, z, 0)$, es decir, es simplemente el eje z.

Por tanto, en el espacio de cuatro dimensiones existen conjuntos de puntos similares a los planos de coordenadas del espacio tridimensional. Estos son seis. Cada uno de ellos está formado de los puntos que, como los puntos de los planos de coordenadas del espacio tridimensional, tienen dos coordenadas que pueden tomar valores numéricos arbitrarios; las dos coordenadas restantes son iguales a cero.



Cada uno de estos planos de coordenadas "pasa" por dos ejes de coordenadas; por ejemplo, el plano yz pasa por el eje y y por el eje z. Por otra parte, por cada eje pasan tres planos de coordenadas. Así, pues, por el eje x pasan los planos xy, xz, y xt. Diremos que el eje x es la intersección de estos planos. Los seis planos de coordenadas contienen un punto común, el origen de coordenadas (0, 0, 0, 0).



Pregunta. ¿Qué conjunto de puntos es la intersección de los planos xy e yz? ¿xy y zt?

Vemos que el cuadro obtenido es totalmente análogo al que se tiene en el espacio tridimensional. Ahora probaremos hacer incluso un dibujo esquemático, que nos ayudará a crear una imagen visual de la posición de los planos de coordenadas y de los ejes de coordenadas en el espacio de cuatro dimensiones. En la fig. 44 los ejes de coordenadas están representados por rectas y se muestran los planos de coordenadas; todo esto es exactamente igual a lo que se hizo en la fig. 31, para el espacio tridimensional.

Planos de coordenadas bidimensionales

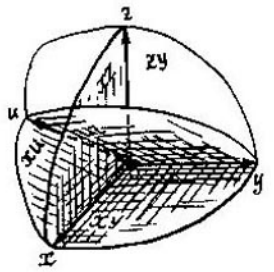


Fig. 44

Sin embargo, en el espacio de cuatro dimensiones otros conjuntos de puntos que se pueden llamar planos de coordenadas. Por cierto, esto se podía esperar, pues, en la recta sólo se tiene el origen de coordenadas; en el plano hay el origen de coordenadas y los ejes; en el espacio tridimensional además del origen de coordenadas y los ejes, aparecen también los planos de coordenadas. Es natural

que en el espacio de cuatro dimensiones aparezcan nuevos conjuntos, que llamaremos *planos de coordenadas tridimensionales.*

Estos conjuntos formados de todos los puntos, son tales que tres de las coordenadas toman todos los valores numéricos posibles y la cuarta es igual a cero. Tal es, por ejemplo, el conjunto de los puntos de la forma $(x, 0, z, t)$ donde x, z, t toman todos los valores posibles. Este conjunto lo llamaremos plano de coordenadas tridimensional xzt. Se comprende fácilmente que en el espacio de cuatro dimensiones existen cuatro planos de coordenadas tridimensionales:

el plano xyz, es el conjunto de los puntos de la forma $(x, y, z, 0)$,

el plano xyt, es el conjunto de los puntos de la forma $(x, y, 0, t)$,

el plano xzt, es el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z, t)$,

el plano yzt, es el conjunto de puntos de la forma $(0, y, z, t)$.

Además, se puede decir que cada uno de los planos de coordenadas tridimensionales "pasa" por el origen de coordenadas y que cada uno de estos planos "pasa" por tres ejes de coordenadas (la palabra "pasa" la empleamos aquí en el sentido de que el origen de coordenadas y cada uno de los puntos de los ejes pertenecen al plano). Por ejemplo, el plano tridimensional xyt pasa por los ejes x, y y t.

Análogamente se puede decir que cada uno de los planos bidimensionales es la intersección de dos

planos tridimensionales. Por ejemplo, el plano xy es la intersección de los planos tridimensionales xyz y xyt, es decir, está formado de todos los puntos que pertenecen simultáneamente a uno y otro conjunto.

Mire la fig. 45, que se diferencia de la fig. 44 en que en esta última está dibujado el plano de coordenadas tridimensional xyz, que representa un paralelepípedo. Es evidente que este plano contiene a los ejes x, y y z y a los planos xy, xz e yz.

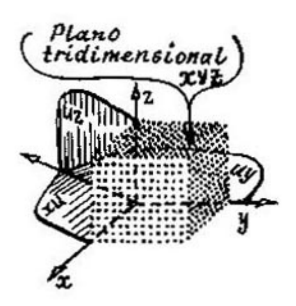


Fig. 45

7. *Algunos problemas*

Intentaremos comprender en qué sentido se puede hablar de la distancia entre los puntos del espacio de cuatro dimensiones.

En los párrafos 3, 6 y 9 del capítulo I de este libro demostramos que el método de coordenadas permite determinar la distancia entre los puntos, sin recurrir a representaciones geométricas. En efecto, la distancia entre los puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ de la recta se calcula por la fórmula

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|,$$

ó

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2};$$

la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano, por la fórmula

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

y, finalmente, la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ del espacio tridimensional,

por la fórmula

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Es natural definir en forma análoga la distancia en el espacio de cuatro dimensiones, o sea, introducir así la siguiente

P

definición.

Se llama *distancia* entre dos puntos del espacio de cuatro dimensiones $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$, el número $\rho(A, B)$ que se calcula por la fórmula

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}.$$

En particular, la distancia entre el punto $A(x, y, z, t)$ y el origen de coordenadas $O(0, 0, 0, 0)$ está dada por la fórmula

$$\rho(0, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Aplicando esta definición, ya se puede resolver problemas de geometría del espacio de cuatro dimensiones, parecidos a los que Ud. resuelve por los manuales de problemas y ejercicios escolares.

Ejercicios.

1. Demuestre que el triángulo con los vértices $A(4, 7, -3, 5)$, $B(3, 0, -3, 1)$ y $C(-1, 7, -3, 0)$ es isósceles.

2. Se tienen cuatro puntos del espacio de cuatro dimensiones:

$$A(1, 1, 1, 1),$$
$$B(-1, -1, 1, 1),$$
$$C(-1, 1, 1, -1),$$
$$D(1, -1, 1, -1).$$

Demuestre que estos cuatro puntos son equidistantes entre sí.

3. Sean A, B y C tres puntos del espacio de cuatro dimensiones. Podemos definir el ángulo ABC de la siguiente forma. Como sabemos calcular la distancia en el espacio de cuatro dimensiones, encontremos $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ y $\rho(A, C)$, es decir, "las longitudes de los lados" del triángulo ABC. Construyamos ahora en el espacio bidimensional ordinario un triángulo $A'B'C'$, de modo que sus lados $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$ sean correspondientemente iguales a $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ y $\rho(A, C)$.



En este caso, ángulo $A'B'C'$ de este triángulo lo llamaremos *ángulo ABC* del espacio de cuatro dimensiones.[1]

Demuestre que el triángulo con vértices $A(4, 7, -3, 5)$, $B(3, 0, -3, 1)$ y $C(1, 3, -2, 0)$ es rectángulo.

4. Tomemos los puntos A, B y C del ejercicio 1. Calcule los ángulos A, B y C del triángulo ABC.

---

[1] Para que esta definición sea correcta (tenga sentido, sea válida), como dicen los matemáticos, es necesario demostrar que en el plano se puede construir un triángulo cuyos lados sean $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ y $\rho(A, C)$. Para esto es necesario convencerse que cada una de estas distancias es menor que la suma de las otras dos, o sea, demostrar unas desigualdades bastante complicadas.

§ 3. El cubo de cuatro dimensiones

8. Definición de la esfera y del cubo

Ahora estudiaremos las figuras geométricas en el espacio de cuatro dimensiones. Por figura geométrica (como en el caso de la geometría ordinaria) comprenderemos un conjunto de puntos.

Veamos por ejemplo, la definición de esfera: esfera es el conjunto de puntos que están situados a una misma distancia de un punto dado (fig. 46). Por analogía se puede aplicar esta definición para definir la esfera en el espacio de cuatro dimensiones; ya sabemos lo que es punto y también sabemos lo que es distancia entre dos puntos. Adaptaremos la definición, traduciéndola al lenguaje de los números (como en el caso del espacio tridimensional, para mayor simplicidad, consideraremos una esfera con centro en el origen de coordenadas).

Definición. Se llama *esfera de cuatro dimensiones* con centro en el origen de coordenadas y radio R, al conjunto de puntos (x, y, z, t) que satisfacen a la relación

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2,$$

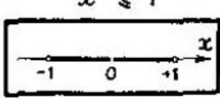
Si se considera no la superficie esférica, sino todo el volumen de la esfera, entonces es necesario reemplazar la igualdad indicada por la **desigualdad**

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant R^2 .$$

Esta observación se refiere también

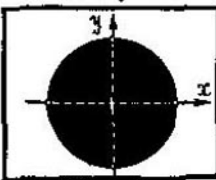
Esfera (segmento) unidimensional

$x^2 \leqslant 1$



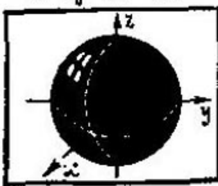
esfera (círculo) bidimensional

$x^2 + y^2 \leqslant 1$



esfera tridimensional

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$



esfera de cuatro dimensiones

$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leqslant 1$

u

Fig. 46

a los casos bidimensionales y tridimesionales.

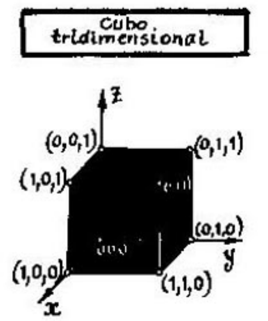
Veamos ahora algo sobre el cubo de cuatro dimensiones. Juzgando por la denominación, ésta es una figura semejante al cubo tridimensional que Ud. bien conoce (fig. 47). También existe en el plano una figura semejante al cubo; ésta es el cuadrado. Examinando las definiciones analíticas del cubo y del cuadrado es extraordinariamente fácil observar la semejanza entre ellas.

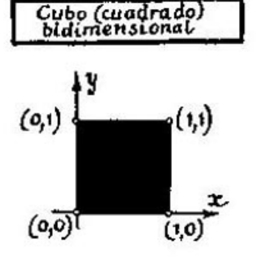
En efecto (como Ud. ya sabe por el ejercicio 5, apartado 10, cap. 1) se puede dar la siguiente definición:

Cubo es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen a las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

En esta definición "aritmética" del cubo ya no se necesita ningún dibujo. Sin embargo, ella corresponde totalmente a la definición geométrica de cubo.[1]





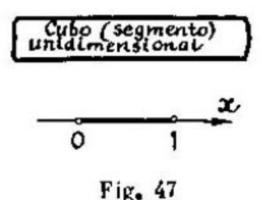


Fig. 47

---

[1] Por supuesto, en el espacio existen otros cubos. Por ejemplo, el conjunto de los puntos que satisfacen a las expresiones $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$ es también un cubo. Este cubo está muy bien situado con respecto a los ejes de coordenadas: su centro es el origen de coordenadas, los ejes y los planos de coordenadas son los ejes y los planos de simetría. Sin embargo, para nuestros fines es cómodo precisamente el cubo determinado por las relaciones (*). Para diferenciar este cubo de los otros, lo llamaremos unitario.

Para el cuadrado también se puede dar la definición aritmética:

se llama *cuadrado* el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen a las relaciones:

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Comparando estas dos definiciones es fácil comprender que, en efecto, como suele decirse, el cuadrado es el análogo bidimensional del cubo. A veces, llamaremos al cuadrado "cubo bidimensional".

También se puede considerar el análogo de estas figuras en el espacio de una dimensión, en la recta. Obtenemos el conjunto de puntos x de la recta que satisfacen a las relaciones:

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Es evidente que este "cubo de una dimensión" es un segmento.

Esperamos que ahora le parecerá absolutamente natural la siguiente **definición:**



se llama *cubo de cuatro dimensiones* al conjunto de puntos (x, y, z, t) que satisfacen a las relaciones:

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

No se preocupen que por ahora no hayamos presentado un dibujo del cubo de cuatro dimensiones, ya lo haremos más adelante (no se asombre que se pueda dibujar un cubo de cuatro dimensiones, pues, solemos dibujar un cubo

tridimensional en una hoja de papel plana). Para esto, primeramente es necesario comprender cómo está "construido" este cubo y qué elementos de éste se pueden distinguir.

9. *La construcción de un cubo de cuatro dimensiones*

Veamos por orden "cubos" de diferentes dimensiones, o sea, un segmento, un cuadrado y un cubo ordinario.

El segmento es una figura muy simple determinada por las relaciones $0 \leqslant x \leqslant 1$. Acerca del segmento, quizas sólo se pueda decir que su frontera consta de dos puntos: 0 y 1. Los puntos restantes del segmento los llamaremos interiores.

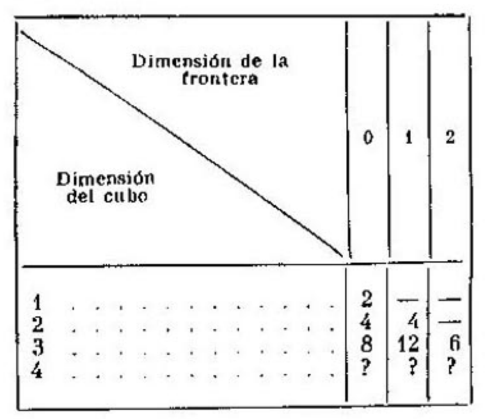
La frontera del cuadrado consta de cuatro puntos (los vértices) y de cuatro segmentos. Por lo tanto, el cuadrado tiene en la frontera elementos de dos tipos: puntos y segmentos. La frontera del cubo tridimensional contiene elementos de tres tipos: los vértices, que son 8, las aristas (segmentos), que son 12 y las caras (cuadrados), que son 6.

Escribamos estos datos en forma de tabla que está en la pág. 84.

Esta tabla se puede escribir abreviadamente si se conviene escribir, en lugar del nombre de la figura, el número n, igual a su dimensión: para el segmento, $n=1$; para el cuadrado, $n=2$; para el cubo, $n=3$. En lugar de la denominación del elemento de la fron-

Elementos de la frontera / (figura)	Puntos (vértices)	Segmentos (lados, aristas)	Cuadrados (caras)
El segmento	2	—	—
El cuadrado	4	4	—
El cubo	8	12	6

tera también se puede anotar la dimensión de este elemento: para la cara, $n=2$, para la arista, $n=1$. En este caso, es conveniente considerar el punto (vértice) como un elemento de dimensión nula ($n=0$). Entonces, la tabla anterior toma esta forma:



Dimensión de la frontera / Dimensión del cubo	0	1	2
1	2	—	—
2	4	4	—
3	8	12	6
4	?	?	?

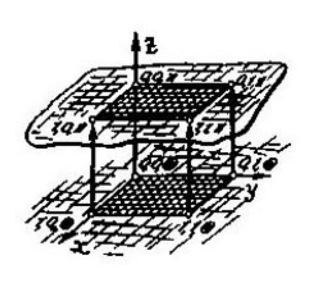


Fig. 48

Nuestro fin es completar la cuarta línea de esta tabla. Para esto, examinaremos de nuevo, pero ahora analíticamente [1], las fronteras del

[1] Es decir aritméticamente.

segmento, del cuadrado y del cubo (fig. 48) y por analogía intentaremos averiguar cómo construir la frontera del cubo de cuatro dimensiones.

La frontera del segmento

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

consta de dos puntos:

$$x=0 \quad \text{y} \quad x=1.$$

La frontera del cuadrado

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

contiene cuatro vértices:

$$x=0,\ y=0; \qquad x=0,\ y=1,$$
$$x=1,\ y=0 \quad \text{y} \quad x=1,\ y=1,$$

es decir, los puntos

$$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0) \text{ y } (1,1).$$

El cubo

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant z \leqslant 1$$

contiene ocho vértices. Cada uno de estos vértices es un punto (x, y, z), en el cual x, y y z están reemplazados o bien por un cero o bien por la unidad. Se obtienen los siguientes ocho puntos:

$$(0,\ 0,\ 0), \quad (0,\ 0,\ 1), \quad (0,\ 1,\ 0),$$
$$(0,\ 1,\ 1), \quad (1,\ 0,\ 0), \quad (1,\ 0,\ 1),$$
$$(1,\ 1,\ 0), \quad (1,\ 1,\ 1).$$

Los *vértices* del cubo de cuatro dimensiones:

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1$$

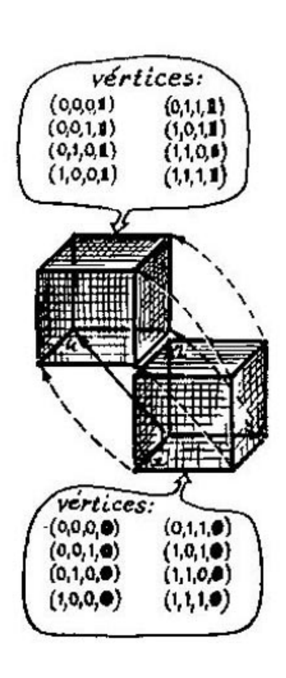


Fig. 49

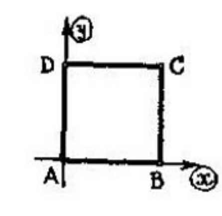


son los puntos (x, y, z, t) en los cuales x, y, z y t están reemplazados o bien por un cero o bien por la unidad.

Tales vértices son 16, porque se pueden formar 16 conjuntos de cuatro números distintos constituidos de ceros y unidades. En efecto, tomemos los conjuntos de tres números formados por las coordenadas de los vértices del cubo tridimensional (son 8) y a cada uno de ellos le agregamos primero el cero y después el uno (fig. 49). Por lo tanto, de cada uno de tales conjuntos de tres números se obtienen dos conjuntos de cuatro números y en total resultarán $8 \cdot 2 = 16$ conjuntos de cuatro números. Así, como hemos calculado los vértices del cubo de cuatro dimensiones.

Pensemos ahora lo que debe llamarse arista del cubo de cuatro dimensiones. Emplearemos de nuevo la analogía. En el cuadrado las aristas (los lados) se determinan por las siguientes relaciones (véase las fig. 50 y 47):

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0 \quad \text{(arista } AB\text{)};$$
$$x = 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{(arista } BC\text{)};$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1 \quad \text{(arista } CD\text{)};$$
$$x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{(arista } DA\text{)}.$$



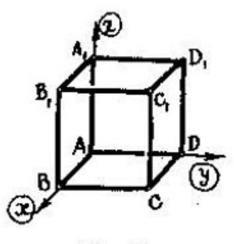


Fig. 50

Como vemos, para las aristas del cuadrado es característico que en todos los puntos de la arista dada, una de las coordenadas tiene un valor numérico determinado: 0 ó 1, y la otra coordenada toma todos los valores entre 0 y 1.

Veamos ahora las aristas del cu-

bo (tridimensional). Tenemos (véase la fig. 50):

$$x=0,\ y=0,\ 0\leqslant z\leqslant 1 \text{ (arista } AA_1\text{)};$$
$$0\leqslant x\leqslant 1,\ \ y=0,\ \ z=1 \text{ (arista } A_1B_1\text{)};$$
$$x=1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1,\ \ z=1 \text{ (arista } B_1C_1\text{)}$$

etc.

Por analogía tenemos.

Definición. Se llaman *aristas* del cubo de cuatro dimensiones los conjuntos de puntos que tienen todas sus coordenadas, a excepción de una, constantes (iguales a 0 ó 1) y la cuarta toma todos los valores posibles entre 0 y 1.



Ejemplos de aristas:

1) $x=0,\ \ y=0,\ \ z=1,\ \ 0\leqslant t\leqslant 1;$
2) $0\leqslant x\leqslant 1,\ \ y=1,\ \ z=0,\ \ t=1,$
3) $x=1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1,\ \ z=0,\ \ t=0,$

etc.

Probemos calcular cuántas aristas tiene el cubo de cuatro dimensiones, es decir, cuántas líneas semejantes se pueden escribir. Para no equivocarnos las anotaremos en un orden determinado. Primero distinguiremos cuatro grupos de aristas: para el primer grupo, sea x la coordenada variable (además $0\leqslant x\leqslant 1$), mientras que y, z y t toman los valores constantes 0 y 1, en todas las combinaciones posibles. Pero, ya sabemos que existen 8 conjuntos diferentes de tres números de ceros y unidades (recuerde cuántos vértices tiene el cubo tridimensional). Por ello hay 8 aristas del primer grupo (para las cuales x es la coordenada

variable). Fácilmente se comprende que las aristas del segundo grupo, para las cuales es variable y y no x, también son 8. De este modo, queda claro que el cubo de cuatro dimensiones tiene en total $4\cdot 8 = 32$ aristas.

Ahora es fácil escribir las relaciones que determinan cada una de estas aristas, sin temor de omitir ninguna:

Primer grupo: $0 \leqslant x \leqslant 1$

y	z	t
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Segundo grupo: $0 \leqslant y \leqslant 1$

x	z	t
0	0	0
0	0	1
0	1	0
...	...	...

Tercer grupo: $0 \leqslant z \leqslant 1$

x	y	t
0	0	0
0	0	1
...	...	...

Cuarto grupo: $0 \leqslant t \leqslant 1$

x	y	z
0	0	0
0	0	1
...	...	...

El cubo tridimensional, además de los vértices y las aristas, tiene también caras. En cada una de las

caras varían dos coordenadas (tomando todos los valores posibles entre 0 y 1), mientras que una de las coordenadas es constante (igual a 0 ó a 1). Por ejemplo, la cara ABB_1A_1 (fig. 50) está determinada por las relaciones:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y=0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Por analogía tenemos.

Definición. *Cara bidimensional* [1] del cubo de cuatro dimensiones es el conjunto de puntos, para los cuales dos coordenadas cualesquiera pueden tomar todos los valores posibles entre 0 y 1 y las dos restantes son constantes (iguales a 0 ó 1).



Ejemplo de una cara:

$$x=0, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ z=1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ejercicios.

1. Calcule el número de caras del cubo de cuatro dimensiones.

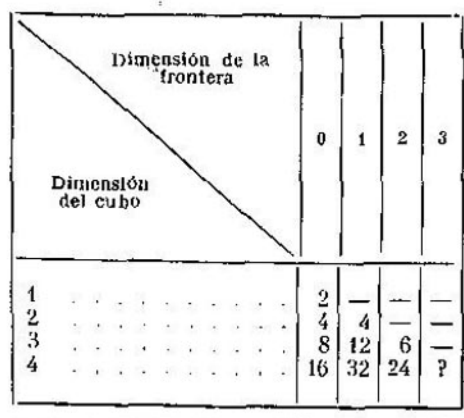
Indicación. Le aconsejamos primero, sin recurrir al dibujo, sino sólo aplicando definiciones analíticas (aritméticas), escribir todas las seis líneas de relaciones que determinan cada una de las seis caras del cubo tridimensional ordinario.

Respuesta. El cubo de cuatro dimensiones tiene 24 caras bidimensionales.

Ahora podemos completar la cuarta línea de nuestra tabla (pág. 90).

Es evidente que esta tabla aún no está terminada, en ella falta el término derecho inferior. Lo que ocurre es que, probablemente, para el cubo de cuatro dimensiones hay

[1] Más adelante se explicará la necesidad que hay de precisar el término cara (bidimensional).



Dimensión del cubo \ Dimensión de la frontera	0	1	2	3
1	2	—	—	—
2	4	4	—	—
3	8	12	6	—
4	16	32	24	?

que agregar una columna más. En efecto, en el segmento sólo había un tipo de frontera: los vértices; en el cuadrado, se aumentaron las aristas; en el cubo, se agregaron los cuadrados: las caras bidimensionales. Por esto, es de esperar que en el cubo de cuatro dimensiones, además de los elementos de la frontera ya conocidos, aparezca otro nuevo tipo de elementos, cuya dimensión será igual a tres.

Probemos encontrarlo.

Definición. Se llama *cara tridimensional* del cubo de cuatro dimensiones al conjunto de puntos, para los cuales tres coordenadas toman todos los valores posibles entre 0 y 1 y una es constante (igual a 0 ó 1).

Es fácil calcular el número de caras tridimensionales. Estas son 8, ya que para cada una de sus cuatros coordenadas hay dos valores posibles: 0 y 1, y tenemos que $2 \cdot 4 = 8$.



Fig. 51

Ahora mire en la fig. 51, en la cual está dibujado un cubo de

cuatro dimensiones. En la fig. se ven los 16 vértices, las 32 aristas, las 24 caras bidimensionales (ellas están representadas por paralelogramos), las 8 caras tridimensionales (están representadas por paralelepípedos). En la fig. se ve bien cuáles son las aristas que contiene cada cara, etc.

¿Cómo se obtuvo este dibujo?

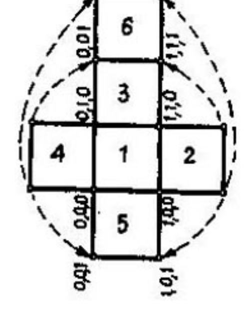
Piense Ud., como se dibuja un cubo ordinario en una hoja de papel plana. Se representa la llamada proyección paralela del cubo tridimensional sobre el plano bidimensional.[1] Para obtener la fig. 51 hicimos primero un modelo espacial, el cual es la proyección del cubo de cuatro dimensiones sobre el espacio tridimensional, y después dibujamos este modelo. Si Ud. tiene manos hábiles, puede hacer este modelo. Por ejemplo, para esto se pueden emplear ce-

---

[1] En el curso de estereometría estudiará Ud. más detalladamente las proyecciones paralelas. Para poder figurarse lo que es la proyección paralela del cubo ordinario sobre el plano, proceda así: haga un cubo de alambre (el armazón del cubo) y observe la sombra que éste arroja sobre una hoja de papel o sobre la pared en un día de sol. Colocando este cubo de una forma conveniente, se obtiene en forma de sombra el mismo dibujo que se ve generalmente en los libros. Esta es la proyección paralela del cubo sobre el plano. Para obtenerla, es necesario trazar por cada punto del cubo una recta paralela a una misma dirección (los rayos solares son paralelos entre sí), pero no obligatoriamente perpendicular al plano. Entonces en la intersección con el plano en el cual proyectamos se obtiene la proyección paralela de la figura.

rillas corrientes, sujetándolas con bolitas plásticas. (¿Cuántas cerillas necesita?, ¿Cuántas bolitas plásticas?, ¿Cuántas cerillas habrá que hincar en cada bolita?).

Se puede obtener también una representación intuitiva del cubo de cuatro dimensiones empleando otro procedimiento. Imagínese que le pedimos enviar un modelo de un cubo tridimensional ordinario. Por supuesto, Ud. puede emplear el correo "tridimensional". Pero el correo recibe las figuras tridimensionales sólo en forma de paquetes postales y esto es difícil. Por lo tanto, es mejor hacerlo así: se hace un cubo de papel, después se despega y nos envía el patrón, o como dicen los matemáticos, *el desarrollo* del cubo. Este desarrollo del cubo está representado en la fig. 52. Como en el dibujo están marcadas las coordenadas de los vértices, fácilmente se comprende cómo se debe pegar este desarrollo para obtener el cubo mismo.



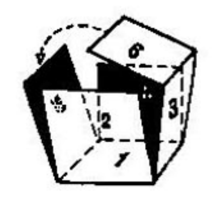


Fig. 52

Ejercicios.

1. Escriba las relaciones que determinan cada cara tridimensional del cubo de cuatro dimensiones.

2. Se puede hacer el desarrollo del cubo de cuatro dimensiones. Esta será una figura tridimensional. Evidentemente, estará formada de 8 cubitos. Si Ud. logra hacer o representarse este desarrollo, haga un croquis del mismo y en el dibujo indique las coordenadas de cada uno de los vértices.

Así, pues, hemos comprendido un poco como ha sido construido un cubo de cuatro dimensiones. Hagamos la prueba de averiguar sus dimensiones. La longitud de cada una de las aristás del cubo de cuatro dimensiones, así como la del cuadrado y la del cubo ordinario, es igual a la unidad (por longitud de la arista comprendemos la distancia entre los vértices que pertenecen a esta arista). No sin razón hemos llamado a nuestros "cubos" unitarios.

1. Calcule las distancias entre otros vértices del cubo que no pertenecen a una misma arista. (Elija, para esto, uno de los vértices; el mejor de todos es el vértice (0, 0, 0, 0) y calcule las distancias a todos los restantes. Ya conoce la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, ya sabe las coordenadas de los vértices; por esto, no queda más que efectuar unas operaciones sencillas).

2. Una vez resuelto el problema 1, Ud. verá que todos los vértices se pueden dividir en cuatro grupos. Los vértices del primer grupo están a la distancia 1 del vértice (0, 0, 0, 0); los vértices del segundo grupo, a la distancia $\sqrt{2}$; los vértices del tercero, a la distancia $\sqrt{3}$ y los del cuarto, a la distancia $\sqrt{4}=2$. ¿Cuántos vértices de cada grupo tiene el cubo de cuatro dimensiones?

3. El vértice (1, 1, 1, 1) es el que está a la mayor distancia, igual a 2, del vértice (0, 0 0, 0).

Este lo llamaremos vértice *opuesto* al vértice (0, 0, 0, 0) y al segmento que los une, *diagonal principal* del cubo de cuatro dimensiones. ¿A qué llamaremos diagonal principal de los cubos de otras dimensiones y cuáles serán las longitudes de sus diagonales principales?

4. Imagínese ahora que tenemos un cubo tridimensional hecho de alambre y en el vértice (0, 0, 0) se encuentra una hormiga. Luego para ir de un vértice a otro la hormiga, deberá caminar por las aristas. ¿Cuántas aristas recorrerá la hormiga para ir desde el vértice (0, 0, 0) hasta el vértice (1, 1, 1)? Por tres aristas. Por esto, llamaremos al vértice (1, 1, 1), vértice de tercer orden. Desde el vértice (0, 0, 0) hasta el vértice (0, 1, 1) el camino por las aristas está formado por dos eslabones; tal vértice lo llamaremos vértice de segundo orden. En el cubo hay también vértices de primer orden, a los cuales puede llegar la hormiga recorriendo una sola arista. Estos vértices son tres: (0, 0, 1), (0, 1, 0) y (1, 0, 0). El cubo tiene también tres vértices de segundo orden; escriba sus coordenadas (problema 4a). Hacia cada uno de los vértices de segundo orden, desde el vértice (0, 0, 0) parten dos caminos formados por dos eslabones; por ejemplo, al vértice (0, 1, 1) se puede llegar pasando por el vértice (0, 0, 1) o por el vértice (0, 1, 0). ¿Por cuántos caminos de tres eslabones se pueden llegar desde un vértice al opuesto (problema 4b)?

5. Toma un cubo de cuatro dimensiones con centro en el origen de coordenadas, es decir, un conjunto de puntos que satisfacen a las relaciones:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant y \leqslant 1, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Encontrar las distancias entre el vértice (1, 1, 1, 1) y todos los vértices restantes de este cubo.

¿Qué vértices serán de primer orden con respecto al vértice (1, 1, 1, 1) (es decir, a que vértices se puede llegar pasando por una arista)? ¿Qué vértices serán de segundo orden? ¿de tercero? ¿de cuarto?

6. La siguiente pregunta puede servir para controlarse Ud. respecto al cubo de cuatro dimensiones: ¿Cuántos caminos de cuatro eslabones hay, desde el vértice (0, 0, 0, 0) de este cubo hasta el vértice opuesto (1, 1, 1, 1), si se va por las aristas del cubo de cuatro dimensiones? Indique detalladamente el recorrido para cada uno de los caminos, señalando ordenadamente los vértices por los que hay que pasar.

7. Si un cubo tridimensional ordinario intersecase con un plano, entonces en la intersección se obtiene naturalmente una figura plana; la sección del cubo. En la fig. 53 están indicadas las secciones que se obtienen al intersecar el cubo con planos perpendiculares a la diagonal principal. Este cuadro se puede representar de otra forma: el cubo se mueve "a través" del

Intersecciones
del cubo tridimensional
con el plano bidimensional

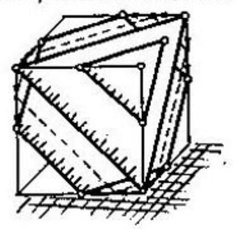
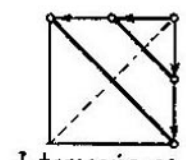


Fig. 53



Intersecciones
del cubo bidimensional
con el plano unidimensional

Fig 54

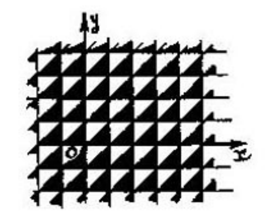


Fig. 55

plano, intersecando sucesivamente en el plano diferentes secciones.

Análogamente, si se mueve un cuadrado ("cubo bidimensional") por una recta ("plano unidimensional") perpendicular a la diagonal principal, primero intersecará en la recta un solo punto; después, este punto se transformará en un segmento que durante el movimiento del cuadrado al principio se alargará (¿hasta qué longitud?) y después se acortará hasta transformarse nuevamente en un punto (fig. 54).

Continuemos la analogía en el otro sentido: supongamos que un cubo de cuatro dimensiones pasa por un espacio tridimensional; entonces, en el espacio tridimensional deben aparecer figuras-secciones tridimensionales del cubo de cuatro dimensiones. Evidentemente, éstos serán unos poliedros. Haga la prueba de imaginarse qué figuras se obtendrán, si el cubo de cuatro dimensiones pasa por un espacio tridimensional, perpendicular a su diagonal principal.

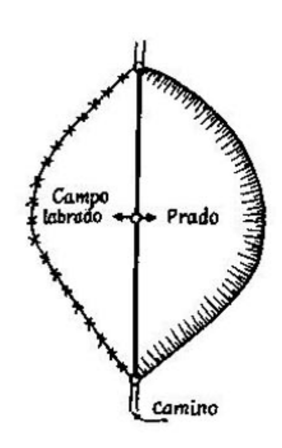


Fig. 56

Indicación. No esperamos que Ud. haga una solución rigurosa de este problema; es necesario intentar resolverlo sobre todo por analogía con los casos tridimensional y bidimensional. Sin embargo, se puede hacer la prueba de dar una demostración exacta para lo cual, por supuesto, habría que precisar la definición (por ejemplo, sería necesario pensar en lo que significa espacio tridimensional, perpendicular a la diagonal principal).

Las respuestas a los ejercicios 1 y 2 están dadas en las figs. 55 y 56, respectivamente.